Mathematik II, M, Sommersemester 2023
3. Übungsblatt
30.3.2023

Aufgabe 3.1. Wir betrachten zu den Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

den von ihnen erzeugten Untervektorraum $U = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$ von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von U.

Aufgabe 3.2. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen annehmen, dass $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist. (Sie müssen dies also *nicht* nachrechnen.) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich B.

Aufgabe 3.3. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Wenden Sie auf die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ (in dieser Reihenfolge) das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Orthonormalbasis, die Sie in (a) erhalten haben.

Aufgabe 3.4. Weisen Sie nach, dass $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ und $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

jeweils Basen des $\mathbb{R}^3$ sind und berechnen Sie die Transformationsmatrix von der Basis C auf die Basis B, das heißt, diejenige Matrix T, die für jeden Vektor mit Koordinatenvektor $\vec{v}_B$ bezüglich B und Koordinatenvektor $\vec{v}_C$ bezüglich C die Gleichung $\vec{v}_B = T\vec{v}_C$ erfüllt.

Aufgabe 3.5. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.6. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$