

Mathematik II, M, Sommersemester 2023
4. Übungsblatt
20.4.2023

Aufgabe 4.1. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.2. Gegeben ist die Matrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass A drei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hat und finden Sie zu jedem Eigenwert λ_i einen Eigenvektor \vec{v}_i mit Länge 1. Schreiben Sie $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ als Spalten in eine Matrix S .
- (b) Begründen Sie, dass S eine Orthogonalmatrix ist und dass zusätzlich

$$S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

gilt.

- (c) Verwenden Sie (b), um A^{10} zu berechnen.

Aufgabe 4.3. Bestimmen Sie alle *komplexen* Zahlen, die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind und bestimmen Sie für jeden Eigenwert alle Eigenvektoren in \mathbb{C}^3 .

Aufgabe 4.4. Als *Typ* eines Kegelschnittes bezeichnen wir seine grobe Form, d.h. ob er (i) die leere Menge, (ii) ein einzelner Punkt, (iii) eine Gerade, (iv) zwei parallele Geraden, (v) zwei einander schneidende Geraden, (vi) eine Ellipse, (vii) eine Hyperbel oder (viii) eine Parabel ist.

Ermitteln Sie (in Abhängigkeit des Wertes $t \in \mathbb{R}$) den Typ des Kegelschnittes

$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 17x_2^2 - 6x_2 = t$$

sowie den Verschiebungsvektor und Drehwinkel. Weitere Parameter wie Halbachsen, Scheitelpunkte, Art der Hauptlage, Steigung etc. müssen *nicht* berechnet werden.

Aufgabe 4.5. Welcher Kegelschnitt wird durch die Gleichung

$$3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 4x_2 = 3$$

definiert? Für die Lösung sollten Sie angeben: Typ (wie in Aufgabe 4.4), Verschiebungsvektor, Drehwinkel und weitere relevante Parameter wie z.B. Halbachsen, Scheitelpunkte, Art der Hauptlage, Steigung etc.

Aufgabe 4.6. Welcher Kegelschnitt wird durch die Gleichung

$$4x_1^2 + 20x_1x_2 + 25x_2^2 + 2x_1 + 5x_2 = 2$$

definiert? Für die Lösung sollten Sie angeben: Typ (wie in Aufgabe 4.4), Verschiebungsvektor, Drehwinkel und weitere relevante Parameter wie z.B. Halbachsen, Scheitelpunkte, Art der Hauptlage, Steigung etc.