Mathematik II, M, Sommersemester 2023
6. Übungsblatt
4.5.2023

Aufgabe 6.1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Aufgabe 6.2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \vec{x},$$

welche die Anfangsbedingung

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Aufgabe 6.3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 14 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Aufgabe 6.4. Wir betrachten das homogene lineare System $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ von Differentialgleichungen mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der einzige Eigenwert von A ist $\lambda_1 = 1$ und dieser Eigenwert hat Vielfachheit 3 (dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden).

(a) Zeigen Sie, dass der allgemeine Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ von der Form $r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$ mit $(r, s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist, wobei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\vec{y}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1$ und $\vec{y}_2(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_2$ Lösungen des Systems sind.

(b) Rechnen Sie nach, dass es *keinen* Vektor $\vec{v}$ gibt mit $(A - \lambda_1 I_3)\vec{v} = \vec{v}_1$ oder mit $(A - \lambda_1 I_3)\vec{v} = \vec{v}_2$.

(c) Ermitteln Sie einen Vektor $\vec{v}_3$ mit $(A - \lambda_1 I_3)\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ und rechnen Sie nach, dass $\vec{y}_3(t) = e^{\lambda_1 t}(\vec{v}_3 + t(\vec{v}_1 + \vec{v}_2))$ eine Lösung des Systems ist.

(d) Zeigen Sie anhand der Wronski-Determinante, dass $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ und $\vec{y}_3$ ein Fundamentalsystem bilden.

Aufgabe 6.5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}}{1+t^2} \\ \frac{-e^{2t}}{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.6. Ermitteln Sie die allgemeine *reelle* Lösung des Systems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

auf folgende Weise.

(a) Berechnen Sie die komplexen Eigenwerte λ_1, λ_2 der Matrix und zeigen Sie, dass $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ gilt. Ermitteln Sie anschließend Eigenvektoren $\vec{v}_1$ zu λ_1 und $\vec{v}_2$ zu λ_2, sodass $\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1}$ gilt.

(b) Die allgemeine *komplexe* Lösung

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

des Systems ist genau dann reell, wenn $c_2 = \overline{c_1}$ (dies können Sie ohne Nachweis annehmen). Setzen Sie $c_1 = a + bi$ und $c_2 = a - bi$ und formen Sie $\vec{x}(t)$ auf die Form

$$\vec{x}(t) = a\vec{y}_1(t) + b\vec{y}_2(t), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

mit reellen $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ um.

Hinweis. Die Eulersche Formel $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ sowie die Eigenschaften $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ und $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ dürften hilfreich sein.