

**Mathematik II, M, Sommersemester 2023**  
**7. Übungsblatt**  
**11.5.2023**

**Aufgabe 7.1.** Berechnen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4(\sin(t))^3 - 9\sin(t) \\ (\cos(t))^3 \end{pmatrix}$$

für jeden Zeitpunkt  $t$  den Ableitungsvektor  $\dot{\vec{x}}(t)$  und ermitteln Sie alle Zeitpunkte, zu denen dieser Ableitungsvektor horizontal oder vertikal verläuft oder  $\vec{0}$  ist (singuläre Punkte). Geben Sie für jeden solchen Zeitpunkt  $t_0$  den Punkt  $\vec{x}(t_0)$  auf der Kurve und den Ableitungsvektor  $\dot{\vec{x}}(t_0)$  an.

**Aufgabe 7.2.** Berechnen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$$

für  $t \in \mathbb{R}$  die Bogenlänge  $s(t)$ , wobei  $s(0) = 0$  gelten soll. Geben Sie danach die natürliche Parametrisierung  $\vec{x}(s)$  der Kurve an.

*Hinweis: Achtung auf Vorzeichen!*

**Aufgabe 7.3.** Bestimmen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \cos(2t) \\ \sin(t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$$

die Scheitelpunkte sowie die dazugehörigen Scheitelkrümmungen. Geben Sie für die Scheitelpunkte sowohl die Zeit  $t$  als auch den zugehörigen Punkt  $\vec{x}(t)$  auf der Kurve an.

*Hinweis: Versuchen Sie bei der Berechnung der Scheitelpunkte auf die zweite Ableitung zu verzichten.*

**Aufgabe 7.4.** Gegeben sei die Kurve  $\vec{\gamma}$ , welche der Graph der Funktion

$$f(x) = e^{-2x}$$

ist (also  $\vec{\gamma} = (x, f(x))$ ). Bestimmen Sie für jedes  $x$  die Krümmung  $\kappa(x)$  sowie den Mittelpunkt  $(\xi(x), \eta(x))$  des Krümmungskreises. Bestimmen Sie danach den Scheitelpunkt  $(x_0, f(x_0))$  von  $\vec{\gamma}$  und zeigen Sie, dass für die Kurve  $\vec{\varepsilon}(x) = (\xi(x), \eta(x))$  zum Zeitpunkt  $x = x_0$  ein singulärer Punkt vorliegt.

*Hinweis: Versuchen Sie bei der Berechnung des Scheitelpunktes auf die zweite Ableitung zu verzichten.*

**Aufgabe 7.5.** Die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4t - t^3 \\ 2\sqrt{3}t^2 \end{pmatrix}$$

bildet eine Schleife. Das heißt, es gibt genau zwei Zeitpunkte  $t_1 \neq t_2$  mit  $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$ . Ermitteln Sie die Werte  $t_1, t_2$  und die Bogenlänge sowie den überstrichenen Flächeninhalt zwischen diesen Zeitpunkten.

**Aufgabe 7.6.** Die Kurve  $r(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$  ist in Polarkoordinaten gegeben. Bestimmen Sie die Bogenlänge und den überstrichenen Flächeninhalt von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \Phi$  für  $\Phi > 0$ . Was geschieht für  $\Phi \rightarrow \infty$ ?

*Hinweis: Für die Bogenlänge könnten sich die Substitution  $u = 1 + \varphi$  und partielle Integration als hilfreich erweisen.*