Mathematik II, M, Sommersemester 2023
8. Übungsblatt
25.5.2023

Aufgabe 8.1. Rechnen Sie nach, dass für die Bogenlänge $s(t)$ (wobei $s(0) = 0$ gelten soll) der Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(t) \\ -\frac{12}{13}(\cos(t))^2 \\ \frac{5}{13}(\sin(t))^2 \end{pmatrix}$$

die Beziehung $s(t) = t$ gilt und man die natürliche Parametrisierung der Kurve somit durch Umbenennen von t zu s erhält. Berechnen Sie anschließend das begleitende Dreibein in Abhängigkeit der Variablen s.

Aufgabe 8.2. Gegeben ist die Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \frac{4}{3}t^{3/2} \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

mit $t > 0$. Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$.
Hinweis: Die Vektoren des begleitenden Dreibeins erfüllen die Beziehungen $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$, $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ und $\vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$. Berechnen Sie zwei der drei Vektoren direkt aus $\dot{\vec{x}}$ und $\ddot{\vec{x}}$ und benutzen Sie für den dritten Vektor eine der obigen Beziehungen. Versuchen Sie, dabei die Reihenfolge zu wählen, die am wenigsten Rechenaufwand braucht.

Aufgabe 8.3. Berechnen Sie Krümmung und Torsion der Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

In welchen Punkten sind Krümmung bzw. Torsion maximal und in welchen Punkten minimal?

Aufgabe 8.4. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0, \\ \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{t \to 0} f\left(t^2, t\right).$$
Was bedeutet dies für die Stetigkeit der Funktion im Punkt $x_0 = y_0 = 0$?

(b) Gegeben ist ein allgemeiner Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (Richtungsvektoren sind immer normiert, d.h. $a^2 + b^2 = 1$). Berechnen Sie die Richtungsableitungen von f im Punkt $x_0 = y_0 = 0$ in Richtung $\vec{r}$ anhand der Definition der Richtungsableitung.

(c) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(0, 0)$ und vergleichen Sie den Wert $\langle \nabla f(0, 0), \vec{r} \rangle$ mit dem Ergebnis aus (b).

Aufgabe 8.5. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = \cos\left(xy + z^2\right) + xy^2 + 2x + yz^2 + yz + 2z.$$

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von f im Punkt P in die Richtungen $\vec{r}$ und $\vec{s}$, wobei

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{s} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) In welche Richtungen ist die Richtungsableitung im Punkt P minimal und in welche maximal? Geben Sie auch die zugehörigen Werte der Richtungsableitung an. Ermitteln Sie außerdem eine allgemeine Darstellung aller Richtungsvektoren, für die die Richtungsableitung Null ist.

Aufgabe 8.6. Eine Kurve sei implizit durch die Gleichung

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 4x^2 + 4y^2 = 0$$

gegeben. Ermitteln Sie alle singulären Punkte und alle Punkte, an denen horizontale oder vertikale Tangenten vorliegen. Geben Sie außerdem für alle anderen Punkte die Geradengleichung der Tangente an und skizzieren Sie die Kurve. (Für die Skizze können Sie einen Computer verwenden.)