Mathematik II, M, Sommersemester 2023
9. Übungsblatt
1.6.2023

Aufgabe 9.1. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -bx^2 + yz - z \\ axz + by^2 \\ axy - b^2x \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Werte von a, b ist $\vec{v}(x,y,z)$ quellenfrei, für welche Werte ist $\vec{v}(x,y,z)$ wirbelfrei?

(b) Wenn $\vec{v}(x,y,z)$ nicht quellenfrei ist, wo liegen dann die Quellen und Senken?

Aufgabe 9.2. Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen der Funktionen

$$f(x,y) = \frac{x + 2x^2y^2}{x^2+1} \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = 2x^3 - 6xy - y^2$$

auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 9.3. Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen der Funktionen

$$f(x,y) = (x-2y)e^{xy} \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = (x-2y)e^{-xy}$$

auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 9.4. Berechnen Sie alle stationären Punkte der Funktionen

$$f(x,y) = x^3\cosh(y) \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + 5y^4$$

auf $\mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, dass die Hessematrix an diesen Stellen *keine* Aussage darüber liefert, ob es sich um Extremstellen oder Sattelpunkte handelt.
Untersuchen Sie anschließend, an welchen Stellen die Funktionen positiv/negativ sind und unterscheiden Sie auf diese Art, wo lokale Maxima, lokale Minima und Sattelpunkte liegen.

Aufgabe 9.5. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung $9x^2 + 4y^2 = 36$,

(a) indem Sie die Nebenbedingung nach einer Variablen auflösen und in f einsetzen;

(b) durch Parametrisieren der durch die Nebenbedingung beschriebenen Kurve;

(c) mit Hilfe der Lagrange Methode.

Aufgabe 9.6. Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = (x-28)^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung $x^3 - y^2 = 0$ mit Hilfe der Lagrange Methode.