Rechenregeln für Determinanten

- Zeilen linear abhängig $\iff \det(A) = 0$
- A hat Nullzeile $\implies \det(A) = 0$
- Determinante linear in jeder Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{z} + \vec{z}\,' \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{z} \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{z}\,' \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda\vec{z} \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{z} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Determinanten

- Zeilen vertauschen $\iff$ Vorzeichen von $\det(A)$ umdrehen

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{z}_i \\ \vdots \\ \vec{z}_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{z}_j \\ \vdots \\ \vec{z}_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Alle Rechenregeln ebenso für Spalten statt Zeilen!

Determinanten und elementare Zeilenumformungen

- Zeilen vertauschen $\Longleftrightarrow$ Vorzeichen von $\det(A)$ umdrehen
- Zeile mit λ multiplizieren $\Longleftrightarrow$ $\det(A)$ mit λ multiplizieren
- λ-faches von Zeile zu anderer Zeile addieren $\Longleftrightarrow$ $\det(A)$ bleibt gleich

Analog für Spalten

Determinanten und inverse Matrizen

Satz

A *invertierbar* $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

- A regulär $:\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$
- A singulär $:\Longleftrightarrow \det(A) = 0$

Folgerung

$$A \text{ regulär} \Longrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Determinanten und inverse Matrizen

$A = (a_{ij})$ regulär, $A^{-1} = (b_{ij})$

- $b_{ij} = (-1)^{i+j} \dfrac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$

  Erinnerung: $A_{ji} = A$ ohne j-te Zeile, i-te Spalte
- Insbesondere
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel

Satz

A regulär, dann

- $A\vec{x} = \vec{b}$ *stets eindeutig lösbar*
- *Lösungsvektor* $\vec{x} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(C_1) \\ \vdots \\ \det(C_n) \end{pmatrix}$,

  wobei $A \xrightarrow{\text{ersetze } i\text{-te Spalte durch } \vec{b}} C_i$

Orthogonale Matrizen

$(n \times n)$-Matrix A orthogonal $:\Longleftrightarrow A^{-1} = A^t$

- äquivalent: Zeilenvektoren Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$
- $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ lässt Winkel und Längen unverändert
- In $\mathbb{R}^2$: Drehungen & Spiegelungen

Über $\mathbb{C}$: A unitär $:\Longleftrightarrow A^{-1} = \overline{A}^t$

Eigenwerte

- Gegeben: $(n \times n)$-Matrix A
- Gesucht: Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), Eigenvektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Berechnen von EW & EV:

- Eigenwert $=$ Nullstelle von $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ (charakteristisches Polynom von A)
- Eigenvektor $=$ Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ von $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

Eigenwerte

- Eigenraum zu EW λ: Lösungsmenge von $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$
  $= \{\vec{x} \mid \vec{x} \text{ EV zu } \lambda\} \cup \{\vec{0}\}$
- $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ Polynom von Grad n
- n komplexe Nullstellen (inkl. Vielfachheiten)

Eigenwerte

Gegeben: λ EW von A

- Algebraische Vielfachheit
  $\mu(\lambda) :=$ Vielfachheit von λ als Nullstelle von $P_A(\lambda)$
- Geometrische Vielfachheit
  $\nu(\lambda) :=$ Dimension des Eigenraums von λ

Satz

Für jeden EW λ gilt $\mu(\lambda) \geq \nu(\lambda)$

- $\nu(\lambda) = n - \mathrm{Rang}(A - \lambda I)$

Eigenwerte

Gegeben: $(n \times n)$-Matrix A

- $$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right) \lambda^{n-1} + \cdots + \det(A) \end{aligned}$$

Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

- $$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \lambda^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \end{aligned}$$

Eigenwerte

Beobachtung

- Summe der EW $=$ Summe der Diagonalelemente von A
- Produkt der EW $= \det(A)$

Folgerung

$\det(A) = 0 \iff \lambda = 0$ ist EW

Beobachtung

A Dreiecksmatrix $\Longrightarrow$ EW $\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \ldots, \lambda_n = a_{nn}$

Eigenwerte

- Relle Matrizen können komplexe EW haben
- Dann EV auch komplex
- λ EW $\iff \overline{\lambda}$ EW
- $\vec{x}$ EV zu $\lambda \iff \overline{\vec{x}}$ EV zu $\overline{\lambda}$

Eigenwerte

Satz

- *A und A^t haben gleiche EW, mit gleichen (alg. & geom.) Vielfachheiten*
- *Falls A invertierbar:*
  $\vec{x}$ *EV zu EW* λ *von* $A \Longleftrightarrow \vec{x}$ *EV zu EW* $\dfrac{1}{\lambda}$ *von* A^{-1}
- *Falls B invertierbar:*
  A und $B^{-1}AB$ gleiche EW, mit gleichen Vielfachheiten

Letzter Fall: A und $B^{-1}AB$ heißen ähnlich

Eigenwerte

Satz

- *EV zu verschiedenen EW* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *sind lin. unabh.*
- *Für jedes* λ_i *bis zu* $\nu(\lambda_i)$ *viele lin. unabh. EV erlaubt*

Eigenwerte reeller symmetrischer Matrizen

A symmetrisch $:\Longleftrightarrow A^t = A$

Satz

Gegeben: A reell symmetrisch

- *Alle EW reell*
- *EV zu verschiedenen EW orthogonal*
- *Für jeden EW λ gilt $\mu(\lambda) = \nu(\lambda)$*

Eigenwerte hermitescher Matrizen

Über $\mathbb{C}$:
A hermitesch $:\Longleftrightarrow A^t = \overline{A}$

Satz

Gegeben: A hermitesch

- *Alle EW reell*
- *EV zu verschiedenen EW orthogonal*
- *Für jeden EW λ gilt $\mu(\lambda) = \nu(\lambda)$*

Hauptachsentransformation

Gegeben: A reell symmetrisch

- EW $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$
- Orthonormalbasis von EV $\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}$
- $T = \left(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}\right)$ ist reell & orthogonal
- $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Hauptachsentransformation

Satz

Für jedes reelle symmetrische A existiert ein reelles orthogonales T mit

$$T^{-1}AT = D,$$

wobei D Diagonalmatrix ist.

- *Spalten von T = Orthonormalbasis aus EV von A*
- *Diagonalelemente von D = EW von A*

- Das obige Vorgehen heißt Hauptachsentransformation
- Streicht man oben die Bedingung „orthogonal“, dann heißt A diagonalisierbar