

E: Differentialrechnung

Definition

Gegeben: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 im Inneren von D .

f **differenzierbar** in $x_0 : \Longleftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ **(erste) Ableitung** von f in x_0 .

- $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **Differenzenquotient**
- Schreibweisen $f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Satz

f in x_0 diff'bar $\implies f$ in x_0 stetig

- Stetig $\not\Rightarrow$ diff'bar! (z.B. $f(x) = |x|$)

$I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall

Definition

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ **auf I diff'bar** $:\iff f$ diff'bar in jedem $x_0 \in I$

$f': I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ **Ableitung** von f .

- Sprechweise: **ableiten** bzw. **differenzieren**
- Schreibweisen: $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$
- Variable t (Zeit): $\dot{f}(t)$ statt $f'(t)$

- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Ableitungsregeln

Gegeben: $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar

- **Summenregel** $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- **Produktregel** $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
(Spezialfall: $(cf(x))' = cf'(x)$)
- **Quotientenregel** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
(falls $g(x) \neq 0$)

Gegeben: $g: I \rightarrow J$, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ beide diff'bar

- **Kettenregel** $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Satz

- *Polynome auf $\mathbb{R}$ diff'bar*
- *Rationale Funktionen auf ihrem Def'bereich diff'bar*

Insbesondere:

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

Ableitungen von Exponential- und Hyperbelfunktionen

- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x \quad (a > 0)$
- $(\sinh(x))' = \cosh(x)$
- $(\cosh(x))' = \sinh(x)$
- $(\tanh(x))' = 1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$
- $(\coth(x))' = 1 - \coth(x)^2 = -\frac{1}{\sinh(x)^2} \quad (x \neq 0)$

Ableitungen trigonometrischer Funktionen

- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2} \quad (x \neq \frac{2k+1}{2}\pi)$
- $(\cot(x))' = -1 - \cot(x)^2 = -\frac{1}{\sin(x)^2} \quad (x \neq k\pi)$

Satz

Gegeben: Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow J$ stetig, bijektiv, diff'bar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann:

- $f^{-1}: J \rightarrow I$ diff'bar in $y_0 = f(x_0)$
- $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$
- $f'(x_0) = 0 \implies f^{-1}$ in y_0 nicht diff'bar!

Weitere grundlegende Ableitungen

- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$
- $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1, 1))$
- $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1, 1))$
- $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$

Definition

Gegeben: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Dann ist f in x_0

- **linksseitig differenzierbar** : $\Longleftrightarrow f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert
- **rechtsseitig differenzierbar** : $\Longleftrightarrow f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert
- $f'(x_0^-), f'(x_0^+)$ **links-/rechtsseitige Ableitung**
- diff'bar in $x_0 \Longleftrightarrow$ links- u. rechtsseitig diff'bar u. $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$
- links- u. rechtsseitig diff'bar $\nRightarrow$ diff'bar

- f diff'bar $\longrightarrow f'$ **Ableitung** von f
- f' diff'bar $\longrightarrow f'' = (f')'$ **zweite Ableitung** von f
- f'' diff'bar $\longrightarrow f''' = (f'')'$ **dritte Ableitung** von f
- $\vdots$

- Schreibweise: $\overbrace{f''\dots'}^{n\text{-mal}} = f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$ **n -te Ableitung** von f

- f **n -mal differenzierbar** : $\Longleftrightarrow f^{(n)}$ existiert
- f **beliebig oft differenzierbar** : $\Longleftrightarrow f^{(n)}$ existiert für alle n

Gegeben: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Definition

- x_0 **lokales Maximum** : $\iff f(x) \leq f(x_0)$ nahe x_0
(formal: $\exists \delta > 0 \forall x \in I: (|x - x_0| < \delta \implies f(x) \leq f(x_0))$)
 - x_0 **lokales Minimum** : $\iff f(x) \geq f(x_0)$ nahe x_0
 - x_0 **lokale Extremstelle** : $\iff x_0$ lokales Maximum oder Minimum
-
- x_0 **globales Maximum** : $\iff f(x_0)$ größter Wert
 - x_0 **globales Minimum** : $\iff f(x_0)$ kleinster Wert

Satz

Gegeben: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar in lokaler Extremstelle $x_0 \in (a, b)$.

$$\implies f'(x_0) = 0$$

- $f'(x_0) = 0$ notwendig für Extremstelle
- **nicht** hinreichend!

Lokale Extremstellen

Gegeben: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Definition

$x_0 \in (a, b)$ **stationärer Punkt** $:\iff f'(x_0) = 0$

- lokale Extremstelle $\implies$ stationärer Punkt
- stationärer Punkt $\not\implies$ lokale Extremstelle

Definition

$x_0 \in (a, b)$ **Sattelpunkt** $:\iff$ stationärer Punkt und

- lok. Max. auf $[a, x_0]$ & lok. Min. auf $[x_0, b]$
oder
- lok. Min. auf $[a, x_0]$ & lok. Max. auf $[x_0, b]$

Satz von Rolle

Angenommen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- stetig,
- in (a, b) diff'bar,
- erfüllt $f(a) = f(b)$.

Dann existiert stationärer Punkt $x_0 \in (a, b)$.

Kandidaten für Extremstellen von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

- stationäre Punkte in (a, b)
- $x_0 \in (a, b)$ mit f nicht diff'bar
- $x_1 = a$
- $x_2 = b$

(Erster) Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Gegeben: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, diff'bar auf (a, b) .

Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Alternative Formulierung: Es gibt $\delta \in (0, 1)$ mit

$$f(b) = f(a) + (b - a) \cdot f'(a + \delta(b - a)).$$

Folgerung

Gegeben: $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, diff'bar auf (a, b) .

- $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b) \implies f$ konstant
- $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a, b) \implies f(x) - g(x)$ konstant
- $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b) \implies f$ monoton wachsend
- $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \implies f$ streng monoton wachsend
- $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b) \implies f$ monoton fallend
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \implies f$ streng monoton fallend

Zweiter (Cauchyscher) Mittelwertsatz

Gegeben: $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, diff'bar auf (a, b) mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Gegeben: x_0 Kandidat für Extremstelle, $\delta > 0$

$$\bullet \quad f'(x) \begin{cases} \geq 0 & x \in (x_0 - \delta, x_0), \\ \leq 0 & x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases} \implies x_0 \text{ Maximum}$$

$$\bullet \quad f'(x) \begin{cases} \leq 0 & x \in (x_0 - \delta, x_0), \\ \geq 0 & x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases} \implies x_0 \text{ Minimum}$$

Wenn x_0 kein Randpunkt:

- $\bullet \quad f'(x) > 0 \text{ nahe } x_0 \implies x_0 \text{ keine Extremstelle}$
- $\bullet \quad f'(x) < 0 \text{ nahe } x_0 \implies x_0 \text{ keine Extremstelle}$
- $\bullet \quad \text{beide F\u00e4lle \& } x_0 \text{ station\u00e4rer Punkt} \implies \text{Sattelpunkt}$

Gegeben: f zweimal diff'bar in stationärem Punkt x_0

- $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ Minimum
- $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ Maximum
- $f''(x_0) = 0 \implies$ keine Aussage!
- $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \implies x_0$ Sattelpunkt

Gegeben: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Gesucht: lokale Extremstellen

- ➊ finde Kandidatstellen
 - ▶ stationäre Punkte
 - ▶ nicht diff'bare Stellen
 - ▶ Randpunkte
- ➋ identifiziere Extremstellen
 - ▶ Vorzeichen Ableitung
oder
 - ▶ 2. Ableitung (stationäre Punkte)
oder
 - ▶ Wertevergleich