Krümmungsverhalten

Definition

Gegeben: $f\colon I \to \mathbb{R}$.

- f konvex $:\iff$ Für alle $a, b \in I, \lambda \in (0,1)$ gilt
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$
- f konkav $:\iff$ Für alle $a, b \in I, \lambda \in (0,1)$ gilt
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$
- f streng konvex/konkav $:\iff$ „$<$“/„$>$“ statt „$\leq$“/„$\geq$“, falls $a \neq b$
- x_0 Wendepunkt $:\iff$ Wechsel zwischen konkav/konvex in x_0

Krümmungsverhalten

- f konvex $\iff$ Graph unterhalb Verbindungsstrecke zw. je 2 Punkten
  $\iff$ „links gekrümmt“
- f konkav $\iff$ Graph oberhalb Verbindungsstrecke zw. je 2 Punkten
  $\iff$ „rechts gekrümmt“

Krümmungsverhalten

Satz

Gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig, im Inneren zweimal diff'bar*

Dann ist

- $f \begin{Bmatrix} \textit{konvex} \\ \textit{konkav} \end{Bmatrix} \iff$ *für alle* x *im Inneren von* I *gilt* $\begin{Bmatrix} f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \end{Bmatrix}$
- $f \begin{Bmatrix} \textit{streng konvex} \\ \textit{streng konkav} \end{Bmatrix}$, *falls für alle* x *im Inneren von* I *gilt* $\begin{Bmatrix} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{Bmatrix}$

Folgerung 1

Gegeben: $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, im Inneren zweimal diff'bar

- $f''(x)$ wechselt Vorzeichen $\iff$ Wendepunkt
- x_0 Wendepunkt $\Longrightarrow f''(x_0) = 0$

Krümmungsverhalten

Folgerung 2

f sowohl konvex als auch konkav $\iff f(x) = kx + d$ (linear)

Beispiele:

- e^x konvex
- $\ln(x)$ konkav
- $\cos(x)$ konkav auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, konvex auf $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ etc.
- $\sin(x)$ konkav auf $[0, \pi]$, konvex auf $[\pi, 2\pi]$ etc.

Satz (Typ $\frac{0}{0}$)

Gegeben: $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig, auf* (a,b) *diff'bar,* $f(a) = g(a) = 0$ *und* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a,b)$.

- $\displaystyle \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *exist.* $\Longrightarrow$ $\displaystyle \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *exist. &* $\displaystyle \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- Analog für $x \to b^-$, $x \to x_0$ (beidseitig), $x \to \pm\infty$
- Analog für Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Regeln von de l'Hospital

Wichtig:

- Nicht $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ableiten, sondern $f(x), g(x)$ separat!
- Voraussetzung $\dfrac{0}{0}$ oder $\dfrac{\infty}{\infty}$ überprüfen!
- $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert nicht $\Longrightarrow$ Keine Aussage!

Regeln von de l'Hospital

Beobachtung (Typ $0 \cdot \infty$)

Gegeben: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) \longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \mathrel{\hat{=}} \text{Typ } \frac{0}{0}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) \longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \mathrel{\hat{=}} \text{Typ } \frac{\infty}{\infty}$

- Nicht beide Wege müssen zum Ziel führen!

Beobachtung (Typ $\infty - \infty$)

Gegeben: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x)\right) \longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)\right)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)\right) \mathrel{\widehat{=}}$ Typ $0 \cdot \infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)\right) = \infty$ (oder $-\infty$)

- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ existiert nicht $\Longrightarrow$ Keine Aussage!

Regeln von de l'Hospital

Beobachtung (Typen 0^0, 1^∞, ∞^0)

Gegeben: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{matrix} \right\}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \infty \\ 0 \end{matrix} \right\}$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} \longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \exp\left(g(x)\ln(f(x))\right)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \exp\left(g(x)\ln(f(x))\right) = \exp\left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\ln(f(x))\right)$ (falls exist.)
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left(g(x)\ln(f(x))\right) \mathrel{\widehat{=}} \text{Typ } 0 \cdot \infty$

Kurvendiskussion

Kurvendiskussion von $f(x)$

- Definitionsbereich
- Nullstellen
- Stetigkeit, Diff'barkeit
- Stationäre Punkte, Extremstellen
- Krümmungsverhalten, Wendepunkte
- Grenzwerte am Rand, Asymptoten
- Skizze

Taylorformel

Gegeben: $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ diff'bar, $x_0 \in (a,b)$, $h \neq 0$ mit $x_0 + h \in (a,b)$

- $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\delta h)$
  für ein $\delta \in (0,1)$ (Mittelwertsatz)

Gegeben: $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar, x_0, h wie zuvor

- $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dfrac{h^2}{2} f''(x_0+\delta h)$
  für ein $\delta \in (0,1)$

Gegeben: $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ dreimal stetig diff'bar, x_0, h wie zuvor

- $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dfrac{h^2}{2} f''(x_0) + \dfrac{h^3}{6} f'''(x_0+\delta h)$
  für ein $\delta \in (0,1)$

Taylorformel

Satz (Taylorformel)

Gegeben: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *$(n+1)$-mal stetig diff'bar,* $x_0 \in (a,b)$, $h \neq 0$ *mit* $x_0 + h \in (a,b)$

- *Es gibt* $\delta \in (0,1)$ *mit*

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) \\ &\qquad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\delta h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\delta h) \end{aligned}$$

Taylorformel

Alternative Schreibweise

Gegeben: f, x_0 wie zuvor, $x \neq x_0$ mit $x \in (a, b)$

- Es gibt $\delta \in (0,1)$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta(x - x_0))$$

Mac Laurinsche Formel

Taylorformel für $x_0 = 0$:

- Es gibt $\delta \in (0,1)$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\delta x)$$

Taylorformel

- Entwicklungspunkt x_0
- Restglied $R_{n+1}(x) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta(x - x_0))$
- $R_{n+1}(x) \mathrel{\hat{=}}$ Fehler bei $f(x) \approx \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$

Beobachtung

- Annäherung von $f(x)$ durch Polynom, falls $|R_{n+1}(x)|$ „klein“
- $|f^{(n+1)}| \leq M$ nahe x_0 $\quad\Longrightarrow\quad |R_{n+1}(x)| \leq \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} M$