Taylorformel

Gegeben: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ n-mal stetig diff'bar, $n \geq 2$, $x_0 \in (a, b)$ mit

- $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
- $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Dann gilt:

- n gerade $\Longrightarrow x_0 \begin{cases} \text{lokales Minimum}, & \text{falls } f^{(n)}(x_0) > 0, \\ \text{lokales Maximum}, & \text{falls } f^{(n)}(x_0) < 0. \end{cases}$
- n ungerade $\Longrightarrow x_0$ Sattelpunkt und Wendepunkt

Taylorreihen

Gegeben: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft diff'bar

- $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_{n+1}(x)$ für jedes n

Definition

Taylorreihe von f um Entwicklungspunkt x_0:

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Frage: Wo konvergiert $T_{f,x_0}(x)$?
Ist dort $T_{f,x_0}(x) = f(x)$? $\iff$ $R_{n+1}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Definition

Gegeben: $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ und $f \colon I \to \mathbb{R}$

- (f_n) konvergiert auf I punktweise gegen f $:\Longleftrightarrow$
$$\forall x \in I : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$
- (f_n) konvergiert auf I gleichmäßig gegen f $:\Longleftrightarrow$
$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| \ : \ x \in I\} = 0$$

- $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ punktweise $\hat{=}$ $f_n(x)$ bel. nah an $f(x)$ einzeln für jedes $x \in I$
- $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig $\hat{=}$ $f_n(x)$ bel. nah an $f(x)$ gleichzeitig $\forall x \in I$

Folgen von Funktionen – Beispiel

$f_n(x) = x^n$

- $I = [0, 2]$: Keine Konvergenz
- $I = [0, 1)$: $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ punktweise, nicht gleichmäßig
- $I = [0, 1]$: $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ punktw., nicht gleichm.
- $I = [0, a]$ mit $0 < a < 1$: $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gleichmäßig

Definition

Gegeben: $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert auf I punktweise/gleichmäßig gegen f $:\Longleftrightarrow$
  $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ konv. auf I punktw./gleichm. gegen f.

Folgen und Reihen von Funktionen

Satz (Weierstrass)

Gegeben: $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konvergiert auf* I *gleichmäßig, falls*

- $M_n := \sup\{|f_n(x)| \ : \ x \in I\} < \infty$ *und*
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *konvergiert.*

Satz

Gegeben: $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ *stetig,* $f : I \to \mathbb{R}$

- $(f_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *gleichmäßig* $\Longrightarrow f$ *stetig*

Potenzreihen

- Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$
- Entwicklungspunkt x_0
- Konvergenzbereich $M := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ konvergiert} \right\}$
- Konvergenzradius $R := \sup\{|x-x_0| \;:\; x \in M\}$
  $(= \infty$, falls M unbeschränkt$)$

Potenzreihen – Konvergenzbereich

Satz

Gegeben: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *mit Konvergenzber. M, Konvergenzrad. R*

- $R = 0 \iff M = \{x_0\}$
- *Falls* $R > 0$*, dann*
  - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *divergent für* $|x-x_0| > R$
  - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *absolut konvergent für* $|x-x_0| < R$
  - $\forall \rho \in (0,R)$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *gleichmäßig konvergent auf* $[x_0-\rho, x_0+\rho]$

Folgerung

- $R = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M = \{x_0\}$
- $0 < R < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad M = (x_0 - R, x_0 + R),\ M = [x_0 - R, x_0 + R),$
  $M = (x_0 - R, x_0 + R]$ oder $M = [x_0 - R, x_0 + R]$
- $R = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad M = \mathbb{R}$

Satz

Gegeben: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *mit Konvergenzbereich* M

- $f : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *stetig*

Potenzreihen – Konvergenzradius

Gegeben: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

Gesucht: Konvergenzradius R

Satz (Cauchy-Hadamard)

- $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ $\qquad (\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0)$
- $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$, *falls GW existiert* $\qquad (\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0)$

Konvergenzbereich – Zusammenfassung

Gegeben: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$

Gesucht: Konvergenzbereich M

- Cauchy-Hadamard $\longrightarrow$ Konvergenzradius R
- Falls $R = 0$ oder $R = \infty$ $\longrightarrow$ fertig ($M = \{x_0\}$ bzw $M = \mathbb{R}$)
- Sonst $x_0 \pm R$ einsetzen $\longrightarrow$ Majorante/Minorante/Leibniz
- $M = (x_0 - R, x_0 + R)$, $M = [x_0 - R, x_0 + R)$,
  $M = (x_0 - R, x_0 + R]$ oder $M = [x_0 - R, x_0 + R]$

Differenzieren von Potenzreihen

Satz

Gegeben: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *mit Konvergenzradius* R

- f *auf* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *beliebig oft diff'bar*
- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$

Taylorreihen – Beispiele

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad M = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad M = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad M = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad M = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad M = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

Taylorreihen – Beispiele

- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad M = (-1,1)$
- $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad M = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } \alpha \in \mathbb{N}_0, \\ (-1,1) & \text{sonst,} \end{cases}$

  wobei $\dbinom{\alpha}{n} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ (insbesondere $\dbinom{\alpha}{0} = 1$)
- $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad M = (-1,1]$
- $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + \cdots, \quad M = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Taylorreihen – Beispiele

- $\operatorname{arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \quad M = [-1, 1]$

  $= x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \cdots$
- $\operatorname{arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad M = [-1, 1]$
- $\operatorname{arsinh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \quad M = [-1, 1]$
- $\operatorname{artanh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad M = (-1, 1)$

Satz (Fixpunktsatz)

Gegeben: $f : [a, b] \to [a, b]$ *stetig, auf* (a, b) *stetig diff'bar,* $|f'(x)| \leq K < 1$

- $\exists$ *eindeutiger Fixpunkt* $x^* \in [a, b]$ *(also* $f(x^*) = x^*$*)*

Wählt man $x_0 \in [a, b]$ *und* $x_n = f(x_{n-1})$ *für* $n \geq 1$*, dann*

- $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$
- $|x_n - x^*| \leq K \cdot |x_{n-1} - x^*| \leq \cdots \leq K^n \cdot |x_0 - x^*|$
- $|x_n - x^*| \leq \dfrac{K}{1-K} |x_n - x_{n-1}|$

Lösung nichtlinearer Gleichungen

Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) stetig diff'bar
Gesucht: Nullstelle x^* von f

Newtonverfahren

Wähle $x_0 \in (a, b)$ und $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ für $n \geq 1$

Achtung: Stationäre Punkte behindern Newtonverfahren!

Satz

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, falls

- *f nahe x^* zweimal stetig diff'bar*
- *$f'(x^*) \neq 0$ und*
- *x_0 nahe genug bei x^**