Mathematik A (ET) Wintersemester 2020/21

10. Übungsblatt (09.12.2020)

Beispiel 10.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der von den Vektoren **(2 Pkt.)**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Unterraum. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ der von den Vektoren

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Unterraum.

Zeigen Sie, dass $U = V$.

Beispiel 10.2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren **(3 Pkt.)**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Unterraum. Ermitteln Sie die Dimension und eine Basis von U.

Zeigen Sie, dass U den Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

erhält und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Koordinaten bezüglich der Basis.

Beispiel 10.3. Weisen Sie nach, dass $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ mit **(3 Pkt.)**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie die Koordinaten von $\vec{a} = (0, 2, 13)^t$ bezüglich B.

Beispiel 10.4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren **(3 Pkt.)**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Unterraum ($\dim U = 3$). Geben Sie eine lineare Gleichung an, deren Lösungsmenge der Untervektorraum U ist.

Beispiel 10.5. Berechnen Sie, in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$, den Winkel zwischen den Vektoren **(2 Pkt.)**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von α sind $\vec{v}, \vec{w}$ orthogonal, für welche Werte sind sie parallel?

Beispiel 10.6. Rechnen Sie nach, dass die Vektoren **(3 Pkt.)**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zueinander orthogonal sind. Ermitteln Sie einen Vektor $\vec{w}$, der zusammen mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bildet und normieren Sie anschließend alle drei Vektoren, um eine Orthonormalbasis zu erhalten.

Beispiel 10.7. Weisen Sie nach, dass **(3 Pkt.)**

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des von ihnen aufgespannten Unterraumes U von $\mathbb{R}^4$ bilden und bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $(20, 19, 46, 41)^t$ auf U.