Mathematik A (ET) Wintersemester 2020/21

11. Übungsblatt (16.12.2020)

Beispiel 11.1. Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit **(2 Pkt.)**

$$f(2,-1,5) = (-4,-1), \qquad f(10,4,-2) = (1,2), \qquad f(-15,-6,3) = (-2,3).$$

Können Sie eine lineare Abbildung angeben, die zumindest zwei der drei genannten Bedingungen erfüllt?

Beispiel 11.2. Wir definieren eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch **(3 Pkt.)**

$$f(x,y,z) = (y-z, x-y, x-z).$$

Zeigen Sie, dass f linear ist und ermitteln Sie eine Matrix A, für die $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ gilt (wobei die Koordinaten jeweils bezüglich der Standardbasis dargestellt sind). Bestimmen Sie anschließend die Dimension und eine Basis des Unterraumes

$$U := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

von $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 11.3. Bestimmen Sie den Rang r der Matrix **(2 Pkt.)**

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

indem Sie sie durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in eine Form bringen, in der noch genau r Einträge ungleich Null sind und diese Einträge allesamt in unterschiedlichen Zeilen und Spalten stehen.

An welcher Stelle in Ihren Umformungen können Sie r bereits ablesen?

Beispiel 11.4. Finden Sie alle Lösungen der Gleichungssysteme **(3 Pkt.)**

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Weil die Gleichungssysteme alle die gleiche linke Seite haben, kann man sie parallel lösen. Dies verringert den Rechenaufwand erheblich.

Beispiel 11.5. Benutzen Sie die CRAMERsche Regel, zum Lösen das Gleichungssystem **(3 Pkt.)**

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

.

Beispiel 11.6. Berechnen Sie die inverse Matrix von **(3 Pkt.)**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 11.7. Berechnen Sie die Determinante der Matrix **(2 Pkt.)**

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & -7 \\ 8 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$