

Mathematik A (ET) Wintersemester 2020/21

12. Übungsblatt (13.1.2021)

Beispiel 12.1. Berechnen Sie

(a) die Summe

(1 Pkt.)

(b) die Produkte

(2 Pkt.)

von je zwei der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

soweit sie definiert sind.

Beispiel 12.2. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

(3 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

indem Sie

(i) die Regel von Sarrus anwenden;

(ii) die Matrix durch elementare Zeilen-/Spaltenumformungen in eine Dreiecksmatrix umformen;

(iii) nach einer Zeile oder Spalte entwickeln.

Beispiel 12.3. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

(2 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4-a & -a \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & a \end{pmatrix}$$

invertierbar? (Die inverse Matrix muss nicht berechnet werden.)

Beispiel 12.4. Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

(3 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a \\ 2 & 3-a & 3 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a-1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen?
Bestimmen Sie im Fall (iii) sämtliche Lösungen.

Beispiel 12.5. Ermitteln Sie alle Eigenwerte der Matrix

(3 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und alle dazugehörigen Eigenvektoren. Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte?

Beispiel 12.6. Ermitteln Sie alle Eigenwerte der Matrix

(3 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

deren Eigenräume sowie algebraische und geometrische Vielfachheiten.

Beispiel 12.7. Ermitteln Sie alle Eigenwerte der Matrix

(3 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

deren Eigenräume sowie algebraische und geometrische Vielfachheiten.