Mathematik A (ET) Wintersemester 2020/2021

2. Übungsblatt (14.10.2020)

Beispiel 2.1. Ermitteln Sie, sofern sie existieren, Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Mengen.

(a) $A = \{4, 7, -10, 92, 0, -121\}$. **(1 Pkt.)**

(b) $B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ **(1 Pkt.)**

(c) $C = \left\{ \frac{2}{n} - (-1)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ **(2 Pkt.)**

(d) $D_1 = \left\{ x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ und $D_2 = \left\{ x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \mid x \in \mathbb{Q} \right\}$. **(3 Pkt.)**

Beispiel 2.2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt : $11^n - 2^{2n}$ ist durch 7 teilbar **(2 Pkt.)**

(b) (Ehemaliges Prüfungsbeispiel) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt **(2 Pkt.)**

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) Für jedes $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ gilt **(2 Pkt.)**

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Hinweis: Im Induktionsanfang muss man die Ungleichung für $n = 2$ zeigen.

Beispiel 2.3. Zeigen Sie, dass für ganze Zahlen k, n mit $0 \leq k \leq n$ stets **(3 Pkt.)**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ und } \binom{n}{k} \cdot k = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

gilt.

Beispiel 2.4. Berechnen Sie

(a) $|3 - 4i|$ und $\overline{3 - 4i}$, **(1 Pkt.)**

(b) $(3 - 4i)^{-1}$. **(1 Pkt.)**