Mathematik A (ET) Wintersemester 2020/2021

4. Übungsblatt (28.10.2020)

Beispiel 4.1. Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \dfrac{(n^6 - 2n^3)e^n + n^2 2^{3n-1}}{(\sqrt{n}+1)10^{n-2}}$. **(2 Pkt.)**

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$. **(2 Pkt.)**

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n = n(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2-1})$. **(2 Pkt.)**

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big((d_n)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $d_n = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$. **(3 Pkt.)**

Hinweis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty \text{ für } a > 1, k \text{ fest.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = 0 \text{ für } |a| < 1, k \text{ fest.}$$

Beispiel 4.2. Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge. **(2 Pkt.)**

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ wobei } a_n = n + (-1)^{n-1}(n-3).$$

Beispiel 4.3. Gegeben ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine ganze Zahl $N > 1$. Ist $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die Partialsummenfolge von **(2 Pkt.)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

und $t_N, t_{N+1}, t_{N+2}, \ldots$ die Partialsummenfolge von

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n\,,$$

dann gilt $t_n = s_n - s_{N-1}$ für alle $n \geq N$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Partialsummenfolgen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergiert. Folgern Sie hieraus, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- absolut konvergiert, falls $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante hat,
- divergiert, falls $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ eine divergente Minorante hat,

und dass $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert, falls $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Beispiel 4.4. Gegeben ist die Reihe **(3 Pkt.)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot(-1)^n}{n^2 + n + (-1)^n(n^2 - n)}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe alterniert und die Summanden eine Nullfolge bilden, aber dass die Reihe dennoch divergiert. Warum lässt sich das Leibniz-Kriterium nicht anwenden?