Mathematik A (ET) Wintersemester 2020/21

9. Übungsblatt (2.12.2020)

Beispiel 9.1. Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen und deren Typ (hebbare Unstetigkeitsstelle, Sprungstelle, wesentliche Unstetigkeitsstelle) der Funktionen **(3 Pkt.)**

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \qquad \text{und} \qquad g(x) = \lfloor \cos(x) \rfloor.$$

Beispiel 9.2. Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + c}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$$

an *allen* ihren Definitionslücken stetig ergänzbar? Geben Sie auch die dazugehörigen Funktionswerte an.

Beispiel 9.3. An welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x) = \frac{e^x + 2 - 3e^{-x}}{e^{2x} - e^x - 4 + 4e^{-x}}$$

nicht definiert? Ermitteln Sie für jede solche Stelle, ob es sich dabei um eine Polstelle oder eine wesentliche Unstetigkeitsstelle von f handelt oder ob f dort stetig ergänzbar ist. Geben Sie im Fall von stetiger Ergänzbarkeit auch den dazugehörigen Funktionswert an.

Beispiel 9.4. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Begründen Sie gegebenenfalls, warum die Aussage wahr ist. Geben Sie für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an. **(3 Pkt.)**

- Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es mindestens ein Punkt x_0, in dem f das Maximum annimmt.
- Erfüllt $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ für ein $x_0 \in (a,b)$ die Bedingung
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = c \in \mathbb{R},$$
dann ist f in x_0 stetig.
- Ist f und $f \cdot g$ stetig im Punkte x_0 und $f(x_0) \neq 0$, dann ist g eine stetige Funktion im Punkte x_0.

Beispiel 9.5. Berechnen Sie $\sqrt[3]{2}$ annäherungsweise mit dem Bisektionsverfahren bis auf einen Fehler kleiner als 0,05. **(2 Pkt.)**

Hinweis: Der Wert ist eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2$.

Beispiel 9.6. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Unterräume des $\mathbb{R}^3$ sind (Nachweis!).

(a) $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ und $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$; **(2 Pkt.)**

(b) $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$ und $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \leq z\}$. **(2 Pkt.)**