Konversatorium Mathematik A (ET)
Wintersemester 2021/22

Schriftliche Lösungen dieser Beispiele können bis zum 31.01.2022 über das TeachCenter abgegeben werden. Bei mindestens 6 vollständig berechneten und abgegebenen Beispielen wird ein Zeugnis mit der Bewertung "mit Erfolg teilgenommen" ausgestellt.

Übung 1. Berechnen Sie den Wert von $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{2022} \in \mathbb{C}$.

Übung 2. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2\sqrt{n^4 - n^2 - 1}}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Übung 3. Bestimmen Sie alle Definitionslücken der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2}$$

sowie deren Typ (stetig ergänzbar, Sprungstelle, Polstelle oder wesentliche Unstetigkeitsstelle).

Übung 4. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, y + z, -x + 3y + 4z).$$

(a) Ermitteln Sie eine Matrix A, für die $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns der Abbildung: $\operatorname{kern} f := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Bildes der Abbildung: $\operatorname{bild} f := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3.\ f(\vec{x}) = \vec{y}\}$.

Übung 5. Gegeben ist die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine orthogonale Matrix P, sodass $D = P^t A P$ diagonal ist.

Übung 6. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie im Fall (iii) alle Lösungen.

Übung 7. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+1} .$$

Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion an und untersuchen Sie f auf Stetigkeit, Nullstellen, Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ und an Definitionslücken, Differenzierbarkeit (mit Angabe von $f'(x)$ an allen Stellen, an denen es existiert), Asymptoten und lokale Maxima und Minima.

Übung 8. Ermitteln Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)^{x \cos \frac{1}{x}} .$$

Übung 9. Die Bremskraft einer Wirbelstromscheibenbremse ist durch die Gleichung

$$K(v) = \frac{a^2 v}{v^2 + b^2}, \quad v \geq 0,$$

als Funktion der Umfangsgeschwindigkeit v gegeben, wobei $a, b > 0$ Konstanten sind.

(a) Bei welcher Umfangsgeschwindigkeit ist die Bremskraft am größten?

(b) Wie groß ist dann die Bremskraft?

Übung 10. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und im offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Es sei $f'(c) \neq 1$ für alle $c \in (a, b)$. Beweisen Sie, dass es höchstens einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ gibt, für den $f(x_0) = x_0$ gilt.