Konversatorium Mathematik A (ET)
Wintersemester 2021/22

3. Übungsblatt (18.10.2021)

Übung 3.1. Sei $1 \neq a \in \mathbb{R}$ eine positive Zahl. Zu Zeigen ist, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

(i) Der Fall $a > 1$.

(a) Sei $a_n = \sqrt[n]{a}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, durch 1 nach unten beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n gibt mit $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$.

(d) Folgern Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für konvergente Reihen, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $0 < a < 1$.

Übung 3.2. Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+2}$.

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, $0 < x < y$.

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

Übung 3.3. Man ermittele alle Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{3n^2 - 2n}{2n^2 + 4n - 5} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right).$$