Konversatorium Mathematik A (ET)
Wintersemester 2021/22

9. Übungsblatt (06.12.2021)

Übung 9.1. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ die Abbildung

$$f(x,y,z) = (x+y+z, 0, x+2y+3z, x+3y+5z).$$

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Ermitteln Sie eine Matrix A, für die $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns der Abbildung:
$\ker f := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

(d) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Bildes $f(\mathbb{R}^3)$ der Abbildung:
$\mathrm{bild} f := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^4 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3.\, f(\vec{x}) = \vec{y}\}$.

Übung 9.2. Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 2 & -5 & 6 \\ 5 & -6 & -4 & 13 & -14 \end{pmatrix}.$$

Übung 9.3. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & a+2 \\ 1-a & 3 & 2a-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a+2 \\ 4-a \end{pmatrix}$$

(a) keine Lösung,

(b) genau eine Lösung,

(c) unendlich viele Lösungen?

Bestimmen Sie im Fall (iii) sämtliche Lösungen.