

Mathematik A (ET) Wintersemester 2021/22

1. Übungsblatt (13.10.2021)

Beispiel 1.1. Ermitteln Sie, sofern sie existieren, Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Mengen.

(a) $A_1 = \{-x^2 + \sqrt{3}x - \frac{3}{4} : x \in \mathbb{R}\}$ und $A_2 = \{-x^2 + \sqrt{3}x - \frac{3}{4} : x \in \mathbb{Q}\}$. (2 Pkt.)

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$. (3 Pkt.)

Beispiel 1.2. Zeigen Sie, dass (1 Pkt.)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Hinweis: binomischer Lehrsatz.

Beispiel 1.3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, gilt (3 Pkt.)

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Außerdem, finden Sie a, b , sodass $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{a}{2k-1} - \frac{b}{2k+1}$ und beweisen Sie die Gleichung ohne Induktion.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt (2 Pkt.)

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + \cdots + n \cdot 5^n = \frac{5 + (4n-1)5^{n+1}}{16}.$$

Beispiel 1.4. Zeichnen Sie in der komplexen Zahlenebene die folgende Menge: (2 Pkt.)

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 2\}.$$

Beispiel 1.5. Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die folgenden Gleichungen erfüllen.

(a) $z^3 = -1 + i$. (2 Pkt.)

(b) $z^2 + (1 + i)z + i = 0$. (2 Pkt.)