Mathematik A (ET) Wintersemester 2021/22

12. Übungsblatt (26.01.2022)

Beispiel 12.1. Führen Sie eine Kurvendiskussion zur Funktion **(4 Pkt.)**

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

durch. Dass heißt, untersuchen Sie den maximalen Definitionsbereich, Nullstellen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Grenzwerte (gegen $\pm\infty$ und bei Definitionslücken), Asymptoten (waagrechte, senkrechte und schräge), Monotonieverhalten (d.h. maximale Intervalle, auf denen f monoton steigend/fallend ist), Extremstellen, Krümmungsverhalten (d.h. maximale Intervalle, auf denen f konkav/konvex ist), Wendepunkte und fertigen Sie eine Skizze an.

Beispiel 12.2. Führen Sie eine Kurvendiskussion zur Funktion **(4 Pkt.)**

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3}.$$

Beispiel 12.3. Verwenden Sie die entsprechende Taylorformel, um eine Näherung von $\sqrt{5}$ mit einer Genauigkeit von 10^{-3} zu berechnen. **(4 Pkt.)**
Hinweis: Bestimmen Sie eine "gute" Stelle zur Entwicklung der Taylorformel und berechnen Sie das Taylorpolynom bis zur Potenz n von x, so dass $|R_{n+1}| < 10^{-3}$.

Beispiel 12.4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x \sin x$.

(a) Bestimmen Sie die n-te Ableitung von $f(x)$ für $n = 4k, 4k+1, 4k+2$ und $4k+3$. **(2 Pkt.)**

(b) Entwickeln Sie die Taylorformel von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ bis zur n-ten Potenz von x und beweisen Sie, dass das Restglied $R_{n+1}(x)$ für $n \to \infty$ gegen 0 strebt. **(2 Pkt.)**
Hinweis: Für n sehr groß (also wenn $n \to \infty$) können Sie $n!$ durch $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ approximieren (Stirlingformel).