Mathematik A (ET) Wintersemester 2021/22

2. Übungsblatt (20.10.2021)

Beispiel 2.1. Überprüfen Sie für jede der nachstehenden Folgen, ob sie beschränkt, monoton wachsend oder monoton fallend, konvergent oder bedingt divergent ist. Für jede Folge bestimmen Sie alle ihre Häufungswerte.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n^2+1}$. **(2 Pkt.)**

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n+1}$. **(2 Pkt.)**

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n = -n^2 + (n^2+2)\cos\dfrac{n\pi}{2}$. **(2 Pkt.)**

Beispiel 2.2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert als:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \text{ für } n \geq 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $a_n < 2$, für alle $n \geq 1$. Hinweis: Induktion. **(1 Pkt.)**

(b) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, und folgern Sie, dass die Folge konvergiert. **(1 Pkt.)**

(c) Berechnen Sie die ersten 8 Glieder der Folge und vermuten Sie den Grenzwert der Folge. **(1 Pkt.)**

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge. Hinweis: Berechnen Sie den Grenzwert der beiden Seiten der Formel $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. **(1 Pkt.)**

Beispiel 2.3. Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. **(3 Pkt.)**