Mathematik A (ET) Wintersemester 2021/22

3. Übungsblatt (27.10.2021)

Beispiel 3.1. Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \dfrac{(n^5 - 3n^3)5^n + n3^{2n-1}}{\sqrt{n}\, 9^{n-2}}$. **(2 Pkt.)**

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n = \sqrt{4n^2+n-1} - \sqrt{4n^2-n+1}$. Hinweis: Man kann die folgende Aussage verwenden: Wenn x_n gegen 1 konvergiert, dann konvergiert auch $\sqrt{x_n}$ gegen 1. **(2 Pkt.)**

Beispiel 3.2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3-3n+1}{9n^3+n-1}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-2n+2}}$. **(3 Pkt.)**

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$. **(3 Pkt.)**

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1+(-1)^n n^2)}{n^3}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{-n^{7/2}-n-1}$. **(3 Pkt.)**

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$. **(2 Pkt.)**

Beispiel 3.3. Gegeben ist eine reelle Zahl q mit $0 < |q| < 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Produkts **(3 Pkt.)**

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right),$$

dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ absolut konvergiert und den Reihenwert $\dfrac{q}{(1-q)^2}$ hat.