

Mathematik A (ET) Wintersemester 2021/22

6. Übungsblatt (17.11.2021)

Beispiel 6.1. Zeigen Sie, dass für alle $a, b > 0$,

(1 Pkt.)

$$\ln(a^b) = b \ln(a)$$

gilt. Verwenden Sie dabei nur die bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion und die Definition von $\ln(x)$ als Umkehrfunktion von e^x (d.h. $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x > 0$).

Beispiel 6.2. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln gelten.

(2 Pkt.)

(a) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $1 + (\cot(x))^2 = \frac{1}{(\sin(x))^2}$, für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Beispiel 6.3. Berechnen Sie ohne Rechner:

(2 Pkt.)

$$\operatorname{arcosh} \left(\frac{\cosh(2x) + \sinh(2x) + 1}{2e^x} \right).$$

Beispiel 6.4. Der Fallweg s und die Fallgeschwindigkeit v eines Körpers im freien Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstands als Funktion der Zeit $t \geq 0$ ist durch

(4 Pkt.)

$$s(t) = \frac{m}{k} \ln \left(\cosh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t \right) \right) \quad \text{und} \quad v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t \right)$$

gegeben. Dabei ist m die Masse des Körpers, k der Reibungskoeffizient und g die Erdbeschleunigung.

(a) Bestimmen Sie $\tanh(\alpha t)$ als Ausdruck in $\cosh(\alpha t)$, für $\alpha t \geq 0$.

(b) Sei $\alpha = \sqrt{\frac{gk}{m}}$. Bestimmen Sie $\cosh(\alpha t)$ als Ausdruck in $s(t)$ (nach obiger Formel).

(c) Bestimmen Sie die Fallgeschwindigkeit $v(s)$ als Funktion des Fallweges s . Hinweis: setzen Sie das Ergebnis von (a) und (b) in die obige Formel für $v(t)$ ein.

(d) Bestimmen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$.

Beispiel 6.5. Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte. (Verwenden Sie keine Differentialrechnung!)

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - \frac{1}{x}}{x - 2 + \frac{1}{x}}$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. (2 Pkt.)

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 3x - 1})$. (2 Pkt.)

(c) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$. (3 Pkt.)