Mathematik A (ET) Wintersemester 2021/22

7. Übungsblatt (24.11.2021)

Verwenden Sie für die Aufgaben auf diesem Blatt **keine** Differentialrechnung!

Beispiel 7.1. Ermitteln Sie alle Asymptoten der Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x) = \frac{2x^5 - 3x^4 + x^2}{x^4 - x^3 - 2x^2}\,.$$

Beispiel 7.2. Für eine reelle Zahl x bezeichnet man mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist (also „x abgerundet“). Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen und deren Typ (hebbare Unstetigkeitsstelle, Sprungstelle, Polstelle, wesentliche Unstetigkeitsstelle) der Funktion $f(x) = \lfloor \sin(x) \rfloor$. **(2 Pkt.)**

Beispiel 7.3. An welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 5e^x + 7 - 3e^{-x}}{e^{2x} - 3 + 2e^{-x}}$$

nicht definiert? Ermitteln Sie für jede solche Stelle, ob es sich dabei um eine Polstelle oder eine wesentliche Unstetigkeitsstelle von f handelt oder ob f dort stetig ergänzbar ist. Geben Sie im Fall von stetiger Ergänzbarkeit auch den dazugehörigen Funktionswert an.

Beispiel 7.4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und periodische Funktion mit Periode L. Beweisen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist. **(3 Pkt.)**

Beispiel 7.5. Nähern Sie eine Nullstelle der Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x) = x\ln(x) - 1$$

numerisch bis auf einen Fehler kleiner als $\varepsilon = 0{,}1$ an, indem Sie das Bisektionsverfahren mit den Anfangswerten $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ verwenden.

Beispiel 7.6. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen U Unterräume der Vektorräumen V sind (Nachweis!). **(3 Pkt.)**

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x - 3z\}, \quad V = \mathbb{R}^3$.

(b) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}, \quad V = \mathbb{R}^2$.

(c) $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}, \quad V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
Hier definiert man $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(cf)(x) = cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$.