Mathematik A (ET) Wintersemester 2021/22

9. Übungsblatt (15.12.2021)

Beispiel 9.1. Sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung **(2 Pkt.)**

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t).$$

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Ermitteln Sie eine Matrix A, für die $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns der Abbildung: $\ker f := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

(d) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Bildes der Abbildung: $\mathrm{bild} f := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^4.\, f(\vec{x}) = \vec{y}\}$.

Beispiel 9.2. Berechnen Sie die inverse Matrix von **(2 Pkt.)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 9.3. Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem **(2 Pkt.)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie im Fall (iii) sämtliche Lösungen.

Beispiel 9.4. Berechnen Sie die Determinante der Matrix **(2 Pkt.)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

indem Sie

(i) die Regel von Sarrus anwenden;

(ii) die Matrix durch elementare Zeilen-/Spaltenumformungen in eine Dreiecksmatrix umformen;

(iii) nach einer Zeile oder Spalte entwickeln.

Beispiel 9.5. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem **(2 Pkt.)**

$$\begin{cases} -x - y = -3 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

eindeutig lösbar ist und berechnen Sie seine Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Beispiel 9.6. Sei A eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass $\det A = \pm 1$. **(2 Pkt.)**