

Konversatorium Mathematik A (ET)

Wintersemester 2022/23

Schriftliche Lösungen dieser Beispiele können bis zum 30.01.2023 im Konversatorium abgegeben werden. Bei mindestens 6 vollständig berechneten und abgegebenen Beispielen wird ein Zeugnis mit der Bewertung "mit Erfolg teilgenommen" ausgestellt.

Übung 1. Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$, sodass

$$z^4 + z^2 - 12 = 0.$$

Übung 2. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n-1}}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Übung 3. Bestimmen Sie die alle Definitionslücken der Funktion

$$f(x) = \frac{6x^2 + 17x + 10}{(2x-1)^2(x+2)}$$

sowie deren Typ (stetig ergänzbar, Sprungstelle, Polstelle oder wesentliche Unstetigkeitsstelle). Führen Sie dann eine Partialbruchzerlegung von f durch.

Übung 4. Sei $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung

$$f \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right) = (a - b, c + d).$$

- (a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns der Abbildung:
kern $f := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.
- (b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Bildes der Abbildung:
bild $f := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : f(\vec{x}) = \vec{y}\}$.

Übung 5. Finden Sie eine allgemeine Formel für die n -te Potenz der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

indem Sie A diagonalisieren.

Übung 6. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie im Fall (iii) alle Lösungen.

Übung 7. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{|x+2|}{\sqrt{x-1}}.$$

Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion an und untersuchen Sie f auf Stetigkeit, Nullstellen, Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty$ und an Definitionslücken, Differenzierbarkeit (mit Angabe von $f'(x)$ an allen Stellen, an denen es existiert), Asymptoten und lokale Maxima und Minima.

Übung 8. Ermitteln Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right).$$

Übung 9. Die Bremskraft einer Wirbelstromscheibenbremse ist durch die Gleichung

$$K(v) = \frac{a^2 v}{v^2 + b^2}, \quad v \geq 0,$$

als Funktion der Umfangsgeschwindigkeit v gegeben, wobei $a, b > 0$ Konstanten sind.

- (a) Bei welcher Umfangsgeschwindigkeit ist die Bremskraft am größten?
- (b) Wie groß ist dann die Bremskraft?

Übung 10. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom ungeraden Grades. Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.