**Name:** **Matrikelnr.:**

# Probeklausur

| *Aufgabe:* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Punkte:* | x | x | x | x | x | x | |
| | | | | | | | = *Punkte* |

**Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten zu begründen!**
**Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und notieren Sie auf jedem Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Aufgabennummer!**

1. Untersuchen Sie die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{2^n + n^2}$$
auf Konvergenz.

2. Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich $D$ der Funktion
$$f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$
an und untersuchen Sie $f$ auf Stetigkeit, Nullstellen, Differenzierbarkeit (mit Angabe von $f'(x)$ an allen Stellen, an welchen es existiert), lokale und globale Extremstellen, und berechnen Sie die Grenzwerte an allen Definitionslücken und für $x \to \pm\infty$.

3. Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x\to\infty} x\left(3^{\frac{1}{x}} + 1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x}}\right).$$

4. Diagonalisieren Sie die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -21 \\ -1 & -6 & 13 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Bitte wenden!**

5. Ergänzen Sie die folgenden Definitionen.

   (a) Eine (reelle oder komplexe) Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn ...

   (b) Sei $(a, b)$ ein offenes Intervall. Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ hat für $x \to a$ den *rechtsseitigen Grenzwert* $c$, wenn ...

   (c) Die *geometrische Vielfachheit* eines Eigenwertes $\lambda$ ist ...

6. Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen richtig sind und begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

   (a) Wenn $a_n$ und $b_n$ Folgen sind, sodass $0 \leq a_n \leq b_n$ gilt und $b_n$ konvergiert, so konvergiert $a_n$.

   (b) Es gelte $a_n^2 \to a_n$. Gilt dann auch stets $a_n \to a_n$?

   (c) Die Funktion $f(x) = x$ ist die einzige Funktion auf $\mathbb{R}$, die mit ihrer Umkehrfunktion identisch ist.

   (d) Seien $a, b, c$ unterschiedliche reelle Zahlen. Dann sind die Vektoren $(1, 1, 1)$, $(a, b, c)$ und $(a^2, b^2, c^2)$ linear unabhängig.