Konversatorium Mathematik A (ET)
Wintersemester 2022/23

8. Übungsblatt (05.12.2022)

Übung 8.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der von den Vektoren **(3 Pkt.)**

$$\vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Unterraum.

(a) Ermitteln Sie die Dimension und eine Basis B von U.

(b) Bestimmen Sie, ob U den Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

enthält und finden Sie gegebenenfalls die Koordinaten von u bezüglich der berechneten Basis B.

Übung 8.2. Seien $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ eine Menge von linear unabhängigen Vektoren eines Vektorraumes V. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Menge $\{\vec{u} + \vec{v},\ \vec{v} + \vec{w},\ \vec{u} + \vec{w}\}$ ist linear unabhängig.

(b) Die Menge $\{\vec{u} - \vec{v},\ \vec{v} - \vec{w},\ \vec{u} - \vec{w}\}$ ist linear unabhängig.

Übung 8.3. Zeigen Sie, dass

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Übung 8.4. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Winkel $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$, $\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})$, $\measuredangle(\vec{w}, \vec{u})$ und bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $\vec{x}$ auf den von $\vec{u}, \vec{w}$ aufgespannten Unterraum U von $\mathbb{R}^3$.