

Konversatorium Mathematik A (ET)

Wintersemester 2022/23

9. Übungsblatt (12.12.2022)

Übung 9.1. Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$f(x, y, z, t) = (3x - 2y, x - 2t, x - 2z).$$

Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass f linear ist.

- (a) Ermitteln Sie eine Matrix A , für die $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ gilt.
- (b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns der Abbildung:

$$\ker f := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

- (c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Bildes der Abbildung:

$$\text{bild } f := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : f(\vec{x}) = \vec{y}\}.$$

Übung 9.2. Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}$$

- (a) keine Lösung,
- (b) genau eine Lösung,
- (c) unendlich viele Lösungen?

Bestimmen Sie im Fall (c) sämtliche Lösungen.

Übung 9.3. Berechnen Sie die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus,
- (b) mithilfe der Adjunkten von A .

Übung 9.4. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x - z & = 2 \\ 3x + y & = 1 \\ x + y + z & = 4 \end{cases}$$

eindeutig lösbar ist und berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel.