

Mathematik A (ET) Wintersemester 2022/23

11. Übungsblatt (25.01.2023)

Beispiel 11.1. Finden Sie alle lokalen Extremstellen von

(2 Pkt.)

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$$

und unterscheiden Sie, ob dort Maxima oder Minima vorliegen und ob diese sogar globale Extremstellen sind.

Beispiel 11.2. Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D der Funktion

(3 Pkt.)

$$f(x) = x^3 \sqrt{1 - x^2}$$

sowie alle lokalen Extremstellen von f auf D . Unterscheiden Sie auch, ob an den Extremstellen Maxima oder Minima vorliegen und ob diese sogar global sind.

Beispiel 11.3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von L'Hospital:

(3 Pkt.)

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\ln x - \ln 5}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\ln(1 - \frac{1}{x^2})}.$$

Hinweis: Wenden sie in (c) die Regel einmal an und vergleichen Sie dann direkt den Zähler und Nenner in ihrer Konvergenzgeschwindigkeit.

Beispiel 11.4. Sei $a > 0$ eine Konstante. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit der Regel von L'Hospital:

(2 Pkt.)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}.$$

Beispiel 11.5. Zeigen Sie, dass der Grenzwert

(2 Pkt.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x - \cos x}$$

dem Fall " $\frac{\infty}{\infty}$ " entspricht, aber dass die Regel von L'Hospital nicht zum Ziel führt. Berechnen Sie dann den Grenzwert direkt.

Beispiel 11.6. Weisen Sie mit dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung nach, dass

(2 Pkt.)

$$|\ln w - \ln z| \leq 3|w - z|$$

für alle $1/3 \leq z < w \leq 3$ gilt.