Mathematik A (ET) Wintersemester 2022/23

1. Übungsblatt (12.10.2021)

Hinweis. Der Binomialkoeffizient ist definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

wobei $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad 0! := 1.$

Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beispiel 1.1. Beweisen Sie, dass es keine rationale Zahl d mit $d^2 = 3$ gibt. **(2 Pkt.)**

Beispiel 1.2. Ermitteln Sie, sofern existent, Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Mengen.

(a) $A = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$. **(2 Pkt.)**

(b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,:\, x < \frac{1}{x}\right\}$. **(3 Pkt.)**

Beispiel 1.3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) **(1 Pkt.)**

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Hinweis: Binomischer Lehrsatz.

(b) **(3 Pkt.)**

$$\sum_{k=0}^{n-q} \binom{n}{k+q} \binom{k+q}{q} = 2^{n-q} \binom{n}{q}.$$

Hinweis: Teilaufgabe (a).

Beispiel 1.4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt **(2 Pkt.)**

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt **(3 Pkt.)**

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{n+r}{r} = \binom{n+m+1}{m}.$$