Mathematik A (ET) Wintersemester 2022/23

2. Übungsblatt (19.10.2021)

Beispiel 2.1. Zeichnen Sie in der komplexen Zahlenebene die folgende Menge: **(2 Pkt.)**

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - (-1 + i)| < 2 \quad \wedge \quad (\mathrm{Re}(z) < 0)\}.$$

Beispiel 2.2. Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die folgenden Gleichungen erfüllen.

(a) $z^3 = -1 - i$. **(2 Pkt.)**
Hinweis: Angabe der Lösung in Polarkoordinaten ist ausreichend.

(b) $z^4 + 3z^2 - 10 = 0$. **(2 Pkt.)**
Hinweis: Substitution $z^2 = x$.

Beispiel 2.3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie die wahren Aussagen und finden Sie ein Gegenbeispiel für jede falsche Aussage. Hierbei dürfen Sie bekannte Ergebnisse aus der Vorlesung benutzen. (Die Folgen seien stets in den reellen Zahlen gegeben.) **(3 Pkt.)**

- Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.
- Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt.
- Jede unbeschränkte Folge ist nicht konvergent.

Beispiel 2.4. Sei die Folge (a_n) durch einen Startwert $a_0 \in [0, 2]$ und die Rekursion

$$a_{n+1} = \frac{a_n(a_n^2 + 3)}{3a_n^2 + 1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass **(2 Pkt.)**

$$a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^3}{3a_n^2 + 1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gilt und beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen per vollständiger Induktion:

$$\begin{aligned} 0 < a_0 < 1 \quad &\Longrightarrow \quad 0 < a_n < 1 \ \text{ für alle } \ n \in \mathbb{N}, \\ 1 < a_0 < 2 \quad &\Longrightarrow \quad 1 < a_n < 2 \ \text{ für alle } \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Folge streng monoton wachsend ist für $0 < a_0 < 1$ und streng monoton fallend für $1 < a_0 < 2$. (Hinweis: Aufgabe (a).) **(2 Pkt.)**

(c) Für welche Startwerte $a_0 \in [0, 2]$ konvergiert die Folge? Bestimmen Sie in diesem Fall den Grenzwert. (Hinweis: Aufgabe (a) und (b).) **(3 Pkt.)**