Mathematik A (ET) Wintersemester 2022/23

4. Übungsblatt (16.11.2022)

Beispiel 4.1. Finden Sie den größtmöglichen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ der Funktionen **(3 Pkt.)**

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln(2x-5)} - \sqrt{-x}$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{15+2x-x^2}}{8-2x}$

(c) $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)} + \frac{1}{\ln x}$

Hinweis: $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

Beispiel 4.2. Gegeben ist die reelle Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{5 - \sqrt{x}}}$$

(a) Finden Sie den größtmöglichen Definitionsbereich A der Funktion.

(b) Bestimmen Sie den Wertebereich $B = F(A)$ der Funktion.

(c) Zeigen Sie, dass $f : A \to B$ bijektiv ist und bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$.

Beispiel 4.3. Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{3x}{x-1}$. **(3 Pkt.)**

(a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(b) Finden Sie den kleinstmöglichen Wertebereich B der Funktion f.

(c) Sei nun $\tilde{f} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to B$ definiert als $\tilde{f} = \frac{3x}{x-1}$. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ bijektiv ist. Finden Sie die Umkehrfunktion $\tilde{f}^{-1}$.

Beispiel 4.4. Gegeben sind die reellen Funktionen $f(x) = \frac{10}{\sqrt{x+1}}$ und $g(x) = 5x - 1$. **(3 Pkt.)**

(a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich sowie den dazugehörigen Wertebereich von f und von g.

(b) Bestimmen Sie die Funktion $f \circ g$ und deren Definitions- und Wertebereich.

(c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der Funktion $f \circ g$ und ihren Definitions- und Wertebereich.

Beispiel 4.5. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. **(3 Pkt.)**

(a) Die Nullfunktion $f(x) \equiv 0$ ist die einzige reelle Funktion, die zugleich symmetrisch und schiefsymmetrisch ist.

(b) Die Verknüpfung zweier schiefsymmetrischer Funktionen ist stets wieder schiefsymmetrisch.

(c) Die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrisch Funktion ist stets schiefsymmetrisch.

(d) Alle periodischen Funktionen sind entweder symmetrisch oder schiefsymmetrisch.

(e) Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2} - 1}$ ist weder symmetrisch, noch schiefsymmetrisch.