

Mathematik A (ET) Wintersemester 2022/23

5. Übungsblatt (23.11.2022)

Beispiel 5.1. Gegeben sei die rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ durch

$$\frac{x^6 - 3x^5 + 10x^4 - 20x^3 + 32x^2 - 32x + 39}{x^4 + 8x^2 + 16}$$

(a) Führen Sie eine Polynomdivision durch:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

wobei $\text{Grad } r < \text{Grad } q$ und zerlegen Sie $h(x)$ in Linearfaktoren.

(b) Finden Sie ein $a \in \mathbb{R}$, sodass $q(x) = (x^2 + a)^2$ gilt. (3 Pkt.)

(c) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\frac{r(x)}{q(x)}$. (2 Pkt.)

Beispiel 5.2. Gegeben sei die rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ durch (3 Pkt.)

$$\frac{7x^2 - 17x + 38}{x^3 + 4x^2 - 11x + 6}$$

(a) Bestimmen Sie mithilfe des Vietaschen Wurzelsatzes die Nullstellen des Nenners $q(x)$ und seine Linearfaktorzerlegung. (Die Nullstellen sind ganzzahlig.)

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{p(x)}{q(x)}$.

(c) Bestimmen Sie die Grenzwerte an den Polstellen von $\frac{p(x)}{q(x)}$.

Beispiel 5.3. Gegeben sei die Funktion $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. (3 Pkt.)

(a) Leiten Sie her, dass die Umkehrfunktion tatsächlich $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ($= \text{artanh } x$) ist.

(b) Untersuchen Sie die Grenzwerte von $\text{artanh } x$ an den Rändern des Definitionsbereiches.

Beispiel 5.4. Berechnen Sie den Grenzwert (2 Pkt.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\cosh(x) - \sinh(x))$$

und weisen Sie nach, dass $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ gilt.

Beispiel 5.5. (3 Pkt.)

(a) Lösen Sie die Gleichung

$$2 \cosh(2x) + 10 \sinh(2x) = 5.$$

(b) Lösen Sie die Gleichung

$$\cosh(\ln x) - \sinh\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2.$$