Mathematik A (ET) Wintersemester 2022/23

6. Übungsblatt (30.11.2022)

Beispiel 6.1. Ermitteln Sie alle Asymptoten der Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x) = \frac{3x^4 - 11x^3 - 13x^2 + 37x + 18}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}.$$

Beispiel 6.2. Für eine reelle Zahl x bezeichnet man mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist (also "x abgerundet"). Bestimmen Sie die Definitionslücken und Unstetigkeitsstellen sowie deren Typ (hebbare Unstetigkeitsstelle, Sprungstelle, Polstelle, wesentliche Unstetigkeitsstelle) der Funktion $f(x) = \frac{\lfloor \cos(x) \rfloor}{x}$. **(2 Pkt.)**

Beispiel 6.3. Sei $f : (-3, 2) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2$ gegeben. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig auf $(-3, 2)$ ist. **(2 Pkt.)**

Beispiel 6.4. Sei $V = \mathbb{R}$. Wir definieren eine Operation (der "Addition") durch **(3 Pkt.)**

$$x \oplus y = \text{ das Maximum von } x \text{ und } y,$$

für alle $x, y \in V$. Weiterhin definieren wir eine Operation (der "skalaren Multiplikation") durch

$$\alpha \odot x = \alpha x$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in V$.
Entscheiden (und begründen) Sie, ob $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist. Falls nein, geben Sie die Vektorraumeigenschaften an, die nicht erfüllt sind.

Beispiel 6.5. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen U Unterräume der angegebenen Vektorräume V sind. **(2 Pkt.)**

(a) $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(2) = 1\}, \quad V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
Hier definiert man $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(cf)(x) = cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = x + z\}, \quad V = \mathbb{R}^3$.

Beispiel 6.6. Seien U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraumes V. **(2 Pkt.)**

(a) Zeigen Sie, dass der Schnitt $U := U_1 \cap U_2$ von U_1 und U_2 ein Unterraum von V ist, also dass $U = \{u \in V \,|\, u \in U_1 \text{ und } u \in U_2\}$ ein Unterraum von V ist.

(b) Sei nun $V = \mathbb{R}^3$. Finden Sie Unterräume U_1 und U_2 von V, sodass die Vereinigung $U := U_1 \cup U_2$ *kein* Unterraum von V ist. Hier ist

$$U_1 \cup U_2 := \{u \in V \,|\, u \in U_1 \text{ oder } u \in U_2\}.$$