Mathematik A (ET) Wintersemester 2022/23

7. Übungsblatt (07.12.2022)

Beispiel 7.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren **(3 Pkt.)**

$$\vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Unterraum.

(a) Ermitteln Sie die Dimension und eine Basis B von U.

(b) Bestimmen Sie, ob U den Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

enthält und finden Sie gegebenenfalls die Koordinaten von u bezüglich der berechneten Basis B.

Beispiel 7.2. Berechnen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, den Winkel zwischen den Vektoren **(2 Pkt.)**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von a sind $\vec{v}, \vec{w}$ orthogonal, für welche Werte sind sie parallel?

Beispiel 7.3. Weisen Sie nach, dass **(2 Pkt.)**

$$\vec{w}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des von ihnen aufgespannten Unterraumes W von $\mathbb{R}^4$ bilden und bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf W.

Beispiel 7.4. Gegeben ist die folgende Basis von $\mathbb{R}^3$: **(3 Pkt.)**

$$\vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie das Gram-Schmidtsche Verfahren, um aus den Vektoren $\vec{u}^{(1)}$, $\vec{u}^{(2)}$, $\vec{u}^{(3)}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ zu bilden. Führen Sie die Rechnung zweimal durch: Einmal in der Reihenfolge $\vec{u}^{(1)}$, $\vec{u}^{(2)}$, $\vec{u}^{(3)}$ und einmal in der Reihenfolge $\vec{u}^{(3)}$, $\vec{u}^{(2)}$, $\vec{u}^{(1)}$.

Beispiel 7.5. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. **(2 Pkt.)**

(a) Jede $(n \times n)$-Matrix A mit orthogonalen Spalten hat Rang n.

(b) Jede Menge $M = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_s\}$ mit $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0$ (für alle $i \neq j$) hat die Eigenschaft, dass die Vektoren aus M eine Orthonormalbasis des von den Vektoren aus M aufgespannten Unterraums U bilden.

(c) Sei $c \neq 0$. Ist $\vec{p}$ die Orthogonalprojektion von $\vec{y}$ auf einen Unterraum U, dann ist $c\vec{p}$ die Projektion von $c\vec{y}$ auf U.