

# Mathematik A (ET) Wintersemester 2022/23

## 8. Übungsblatt (14.12.2022)

**Beispiel 8.1.** Sei  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Abbildung

(3 Pkt.)

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y - z - 3t, x - 4z + t, x - 2y + 3z + t).$$

Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass  $f$  linear ist.

- (a) Ermitteln Sie eine Matrix  $A$ , für die  $f(\vec{x}) = A\vec{x}$  gilt.
- (b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns der Abbildung:

$$\ker f := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

- (c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Bildes der Abbildung:

$$\text{bild } f := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : f(\vec{x}) = \vec{y}\}.$$

**Beispiel 8.2.** Für welche Werte  $a, b \in \mathbb{R}$  hat das Gleichungssystem

(3 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) keine Lösung,
- (b) genau eine Lösung,
- (c) unendlich viele Lösungen?

Bestimmen Sie im Fall (c) sämtliche Lösungen.

**Beispiel 8.3.** Berechnen Sie die Inverse von

(3 Pkt.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

- (a) mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus,
- (b) mithilfe der Adjunkten von  $A$ .

**Beispiel 8.4.** Berechnen Sie die Determinante der Matrix

(3 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

indem Sie

- (a) die Regel von Sarrus anwenden;
- (b) die Matrix durch elementare Zeilen-/Spaltenumformungen in eine Dreiecksmatrix umformen;
- (c) nach einer Zeile oder Spalte entwickeln.

**Beispiel 8.5.** Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

(2 Pkt.)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

eindeutig lösbar ist und berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel.