Mathematik A (ET) Wintersemester 2022/23

9. Übungsblatt (11.01.2023)

Beispiel 9.1. Ermitteln Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrizen, deren Eigenräume, sowie algebraische und geometrische Vielfachheiten.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{R}$); **(2 Pkt.)**

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{R}$); **(2 Pkt.)**

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{C}$); **(2 Pkt.)**

Beispiel 9.2. Eine Matrix A heißt *diagonalisierbar*, wenn eine Matrix S existiert (in deren Spalten die Eigenvektoren von A stehen) und wenn eine Diagonalmatrix D existiert (wobei die Diagonaleinträge die Eigenwerte von A sind), sodass $S^{-1}AS = D$ gilt. Bestimmen Sie S und D für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ und verwenden Sie diese Darstellung, um A^{2023} zu ermitteln. **(2 Pkt.)**

Beispiel 9.3. Bestimmen Sie die Hauptachsentransformation der folgenden Matrix A, d.h., finden Sie eine Orthogonalmatrix P und eine Diagonalmatrix D, sodass $D = P^{-1}AP = P^tAP$ gilt. **(3 Pkt.)**

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Beispiel 9.4. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen: **(3 Pkt.)**

(a) Seien A und B jeweils (2×2)-Matrizen. Dann gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(b) Es seien v_1 und v_2 verschiedene Eigenvektoren eines Eigenwertes λ. Dann sind v_1 und v_2 linear abhängig.

(c) Sei λ ein Eigenwert einer Matrix A. Dann ist jeder Vektor des Eigenraums von λ ein Eigenvektor von λ.

(d) Ist 0 ein Eigenwert einer Matrix A, so hat A^2 nicht Rang n.

(e) Jede invertierbare (2×2)-Matrix A ist diagonalisierbar.

(f) Jede diagonalisierbare (2×2)-Matrix A ist invertierbar.