

Mathematik A (ET) Wintersemester 2023/24

1. Übungsblatt (11.10.2023)

Hinweis. Der Binomialkoeffizient ist definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

wobei $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! := 1$.

Für $1 \leq k \leq n-1$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beispiel 1.1. Beweisen Sie, dass es keine rationale Zahl d mit $d^2 = 5$ gibt. Wieso funktioniert der Beweis nicht mehr, wenn man die Zahl 5 mit der Zahl 4 ersetzt? (2 Pkt.)

Beispiel 1.2. Ermitteln Sie, sofern existent, Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Mengen. (3 Pkt.)

(a) $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

(b) $B = \{a - b : a, b \in \mathbb{R}, 1 < a < 2, 3 < b < 4\}.$

Beispiel 1.3. (2 Pkt.)

(a) Sei s eine obere Schranke der Menge S und $s \in S$. Zeigen Sie, dass dann $s = \sup S$ gilt.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

Hat jede Menge von Zahlen, die nach oben beschränkt ist, ein Supremum?

Hat jede Menge von Zahlen, die nach oben beschränkt ist, ein Maximum?

Beispiel 1.4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Hinweis: Binomischer Lehrsatz.

(b)

$$\sum_{k=0}^{n-q} \binom{n}{k+q} \binom{k+q}{q} = 2^{n-q} \binom{n}{q}.$$

Hinweis: Teilaufgabe (a).

Beispiel 1.5. Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n (3k-2) = n(3n-1)/2.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{r=0}^m \binom{n+r}{r} = \binom{n+m+1}{m}.$$