Mathematik A (ET) Wintersemester 2023/24

11. Übungsblatt (10.01.2024)

Beispiel 11.1. Ermitteln Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrizen, deren Eigenräume, sowie algebraische und geometrische Vielfachheiten.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{R}$); **(2 Pkt.)**

(b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{R}$); **(3 Pkt.)**

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{R}$); **(2 Pkt.)**

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{C}$); **(2 Pkt.)**

Beispiel 11.2. Eine Matrix A heißt *diagonalisierbar*, wenn eine Matrix S existiert (in deren Spalten die Eigenvektoren von A stehen) und wenn eine Diagonalmatrix D existiert (wobei die Diagonaleinträge die Eigenwerte von A sind), sodass $S^{-1}AS = D$ gilt. Bestimmen Sie S und D für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ und verwenden Sie diese Darstellung, um A^{2024} zu ermitteln. **(2 Pkt.)**

Beispiel 11.3. Bestimmen Sie die Hauptachsentransformation der folgenden Matrix A, d.h., finden Sie eine Orthogonalmatrix P und eine Diagonalmatrix D, sodass $D = P^{-1}AP = P^tAP$ gilt. **(3 Pkt.)**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 11.4. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen: **(3 Pkt.)**

(a) Es seien v_1 und v_2 verschiedene Eigenvektoren eines Eigenwertes λ. Dann sind v_1 und v_2 linear abhängig.

(b) Sei λ ein Eigenwert einer Matrix A. Dann ist jeder Vektor des Eigenraums von λ ein Eigenvektor von λ.

(c) Ist 0 ein Eigenwert einer $(n \times n)$-Matrix A, so hat A^2 nicht Rang n.

(d) Jede invertierbare (2×2)-Matrix A ist diagonalisierbar.