

Mathematik A (ET) Wintersemester 2023/24

13. Übungsblatt (24.01.2024)

Beispiel 13.1. Finden Sie alle lokalen Extremstellen von

(2 Pkt.)

$$f : [-2, 2] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

und unterscheiden Sie, ob dort Maxima oder Minima vorliegen und ob diese sogar globale Extremstellen sind.

Beispiel 13.2. Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D der Funktion

(3 Pkt.)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

sowie alle lokalen Extremstellen von f auf D . Unterscheiden Sie auch, ob an den Extremstellen Maxima oder Minima vorliegen und ob diese sogar global sind. Bestimmen Sie dann auch die Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches (ggf. $x \rightarrow \pm\infty$).

Beispiel 13.3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von L'Hospital:

(3 Pkt.)

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\ln x - \ln 2}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x)^{\frac{10}{3x}}.$$

Beispiel 13.4. Sei $a > 0$ eine Konstante. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit der Regel von L'Hospital:

(2 Pkt.)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}.$$

Beispiel 13.5. Zeigen Sie, dass der Grenzwert

(2 Pkt.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$$

dem Fall " $\frac{\infty}{\infty}$ " entspricht, aber dass die Regel von L'Hospital nicht zum Ziel führt. Berechnen Sie dann den Grenzwert direkt.

Beispiel 13.6.

(3 Pkt.)

- (a) Geben Sie Beispiele von Polynomen dritten Grades an, die (i) keine stationären Punkte, (ii) genau einen stationären Punkt, und (iii) genau 2 stationäre Punkte besitzen.
- (b) Zeigen Sie, dass jedes Polynom dritten Grades genau einen Wendepunkt besitzt.
- (c) Sei f ein normiertes Polynom dritten Grades mit 3 verschiedenen reellen Nullstellen a, b und c (d.h. es gibt die Darstellung in Linearfaktoren $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$). Zeigen Sie, dass der eindeutig bestimmte Wendepunkt beim Mittelwert $x_0 = \frac{a+b+c}{3}$ der drei Nullstellen angenommen wird.