Mathematik A (ET) Wintersemester 2023/24

14. Übungsblatt (31.01.2024)

Hinweis: Für dieses Übungsblatt dürfen Sie bekannte Reihenentwicklungen aus der Vorlesung bzw. dem Skript ohne Beweis benutzen.

Beispiel 14.1. Bestimmen Sie die Mac Laurin Reihen der folgenden Funktionen: **(2 Pkt.)**

(a) $f(x) = x^2 \arctan(x^3)$

(b) $g(x) = \cos^2(x)$
(*Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete trigonometrische Identität.*)

Beispiel 14.2. Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \frac{1}{x}$ um den Punkt $x_0 = 2$. **(2 Pkt.)**

Beispiel 14.3. Sei **(2 Pkt.)**

$$f(x) = 2\cosh(x) - x\sinh(x) - 2 \quad \text{und} \quad g(x) = e^{(x^2)} - 1 - x\ln(1+x).$$

Bestimmen Sie die Mac Laurin Reihen von $f(x)$ und $g(x)$ (bis zum ersten Term der ungleich 0 ist), um damit den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

zu bestimmen.

Beispiel 14.4. In dieser Aufgabe wollen wir $\sqrt{5} \approx 2.2360679775$ durch Taylorpolynome mit einer von Genauigkeit 10^{-3} annähern. **(4 Pkt.)**

(a) Verwenden Sie ein Taylorpolynom der Funktion $y = \sqrt{x+4}$ (mit geeignetem Grad), mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Verwenden Sie ein Taylorpolynom der Funktion $y = \sqrt{1+x}$ (mit geeignetem Grad), mit Entwicklungspunkt $\frac{0.16}{4.84}$. Benutzen Sie hierbei den "Trick"
$\sqrt{5} = \sqrt{4.84 + 0.16} = \sqrt{4.84}\sqrt{1 + \frac{0.16}{4.84}}$.
Hinweis: Sie dürfen hier benutzen, dass $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots \quad (|x| < 1)$ *gilt.*

(c) Welchen Unterschied stellen Sie fest und warum?

Beispiel 14.5. Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall. **(3 Pkt.)**

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)!}(x-2)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n}(4x-1)^{n-1}$

Beispiel 14.6. Wir wollen das Newtonverfahren verwenden, um die Nullstelle x_0 von **(2 Pkt.)**

$$f(x) = 2x^2 + 5 - e^x$$

im Intervall $[3, 4]$ zu approximieren.

(a) Weisen Sie nach, dass $f(3)$ und $f(4)$ unterschiedliche Vorzeichen haben.

(b) Approximieren Sie x_0 mit dem Newton-Verfahren auf mindestens sechs Nachkommastellen genau.

Hinweis: $x_0 \approx 3.27560108884732$.