Mathematik A (ET) Wintersemester 2023/24

2. Übungsblatt (18.10.2023)

Beispiel 2.1. Zeichnen Sie in der komplexen Zahlenebene die folgende Menge: **(2 Pkt.)**

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - (3 - 2i)| < 4 \quad \wedge \quad [(\operatorname{Im}(z) > 0) \vee (\operatorname{Re}(z) < 0)]\}.$$

Beispiel 2.2. Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die folgenden Gleichungen erfüllen.

(a) $z^5 = 2 - 2i$. **(2 Pkt.)**
Hinweis: Angabe der Lösung in Polarkoordinaten ist ausreichend.

(b) $z^4 - 4z^2 - 21 = 0$. **(2 Pkt.)**
Hinweis: Substitution $z^2 = x$.

Beispiel 2.3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie die wahren Aussagen und finden Sie ein Gegenbeispiel für jede falsche Aussage. Hierbei dürfen Sie bekannte Ergebnisse aus der Vorlesung benutzen. (Die Folgen seien stets in den reellen Zahlen gegeben.) **(3 Pkt.)**

- Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.
- Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt.
- Jede unbeschränkte Folge ist nicht konvergent.

Beispiel 2.4. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $a_n = a_{n-1} + n$ mit Anfangswert $a_0 = 4$. Finden Sie eine explizite Darstellung für a_n. **(2 Pkt.)**

Beispiel 2.5. Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir definieren die rekursive Folge (x_n) durch **(3 Pkt.)**

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

für einen beliebigen Startwert $0 < x_0 < \frac{1}{a}$.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $x_{n+1} \leq \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
Hinweis: Schreiben Sie die Induktionsvoraussetzung $x_n \leq \frac{1}{a}$ als $x_n = \frac{1}{a} - d_n$ für $d_n \geq 0$ um.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (Benutzen Sie hierfür (a)).

(c) Begründen Sie, weshalb die Folge $(x_n)_n$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.