Mathematatik A (ET) Wintersemester 2023/24

4. Übungsblatt (08.11.2023)

Beispiel 4.1. Zeigen Sie, dass die Reihe **(4 Pkt.)**

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k+1}{2^k}$$

konvergiert. Beweisen Sie anschließend für die Partialsummen s_n der Reihe durch vollständige Induktion die Darstellung

$$s_n = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

und nutzen Sie dieses Resultat zur Gewinnung des Grenzwerts s der Reihe.

Beispiel 4.2. Gegeben ist eine reelle Zahl q mit $0 < |q| < 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Produkts **(2 Pkt.)**

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right),$$

dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ absolut konvergiert und den Reihenwert $\displaystyle\frac{q}{(1-q)^2}$ hat.

Beispiel 4.3. Finden Sie den größtmöglichen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ der Funktionen **(3 Pkt.)**

(a) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+9x-22}$

(b) $f(x) = \ln(2 - \sqrt{1-x})$

Geben Sie weiterhin eine Funktion an, deren größtmöglicher Definitionsbereich $(2, \infty)$ ist.
Hinweis: $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

Beispiel 4.4. Gegeben ist die reelle Funktion **(3 Pkt.)**

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{3 - \sqrt{x}}}$$

(a) Finden Sie den größtmöglichen Definitionsbereich A der Funktion.

(b) Bestimmen Sie den Wertebereich $B = f(A)$ der Funktion.

(c) Zeigen Sie, dass $f : A \to B$ bijektiv ist und bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$.

Beispiel 4.5. Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{5x}{x-3}$. **(3 Pkt.)**

(a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(b) Finden Sie den Wertebereich $B = f(A)$.

(c) Sei nun $\tilde{f} : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to B$ definiert als $\tilde{f}(x) = \frac{5x}{x-3}$. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ bijektiv ist. Finden Sie die Umkehrfunktion $\tilde{f}^{-1}$.

Beispiel 4.6. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. **(3 Pkt.)**

(a) Die Nullfunktion $f(x) \equiv 0$ ist die einzige reelle Funktion, die zugleich symmetrisch und schiefsymmetrisch ist.

(b) Seien f und g symmetrische Funktionen. Dann sind das Produkt $f \cdot g$ und die Verknüpfung $f \circ g$ wieder symmetrische Funktionen.

(c) Alle periodischen Funktionen sind entweder symmetrisch oder schiefsymmetrisch.