Mathematik A (ET) Wintersemester 2023/24

7. Übungsblatt (29.11.2023)

Beispiel 7.1. Sei $V = \mathbb{R}$. Wir definieren eine Operation (der "Addition") durch **(3 Pkt.)**

$$x \oplus y = \text{ das Minimum von } x \text{ und } y,$$

für alle $x, y \in V$. Weiterhin definieren wir eine Operation (der "skalaren Multiplikation") durch

$$\alpha \odot x = \alpha x$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in V$.
Entscheiden (und begründen) Sie, ob $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist. Falls nein, geben Sie die Vektorraumeigenschaften an, die nicht erfüllt sind.

Beispiel 7.2. Entscheiden (und begründen) Sie, ob die folgenden Mengen U Unterräume der angegebenen Vektorräume V sind. **(3 Pkt.)**

(a) $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(4) = 1\}, \quad V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
Hier definiert man $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(cf)(x) = cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y + z\}, \quad V = \mathbb{R}^3$.

(c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z\}, \quad V = \mathbb{R}^3$.

Beispiel 7.3. Seien U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraumes V. **(2 Pkt.)**

(a) Zeigen Sie, dass der Schnitt $U := U_1 \cap U_2$ von U_1 und U_2 ein Unterraum von V ist, also dass $U = \{\vec{u} \in V \,|\, \vec{u} \in U_1 \text{ und } \vec{u} \in U_2\}$ ein Unterraum von V ist.

(b) Sei nun $V = \mathbb{R}^2$. Finden Sie Unterräume U_1 und U_2 von V, sodass die Vereinigung $U := U_1 \cup U_2$ *kein* Unterraum von V ist. Hier ist

$$U_1 \cup U_2 := \{\vec{u} \in V \,|\, \vec{u} \in U_1 \text{ oder } \vec{u} \in U_2\}.$$

Beispiel 7.4. Wir bezeichnen mit $V = \mathbb{R}^\infty$ den Vektorraum aller Folgen reeller Zahlen. Hierbei ist die Addition und skalare Multiplikation komponentenweise definiert. Entscheiden (und begründen) Sie, ob die folgenden Teilmengen von V auch Unterräume von V sind. **(3 Pkt.)**

(a) Folgen, die unendlich viele Nullen haben.

(b) Folgen, die beschränkt sind.

(c) Folgen, die konvergent sind.

Beispiel 7.5. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{x} = (1, 1, 0)$, $\vec{y} = (0, 1, 2)$ und $\vec{z} = (3, 1, -4)$ im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind, indem sie Skalare α und β finden, sodass $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$ gilt. **(2 Pkt.)**

Beispiel 7.6. Sei $\vec{u} = (\lambda, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, \lambda, 1)$ und $\vec{w} = (0, 1, \lambda)$. Finden Sie *alle* Werte von λ, sodass $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ eine linear abhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist. **(2 Pkt.)**