

Mathematik A (ET) Wintersemester 2023/24

8. Übungsblatt (06.12.2023)

Beispiel 8.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

(3 Pkt.)

$$\vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Unterraum.

- (a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{u}^{(1)}$ linear abhängig von den anderen Vektoren ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{u}^{(2)}, \vec{u}^{(3)}, \vec{u}^{(4)}$ eine Basis B von U bilden.
- (c) Bestimmen Sie, ob U die Vektoren

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

enthält und finden Sie gegebenenfalls die Koordinaten von $\vec{v}^{(1)}$ bzw. $\vec{v}^{(2)}$ bezüglich der berechneten Basis B .

Beispiel 8.2. Berechnen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, den Winkel zwischen den Vektoren

(2 Pkt.)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie (sofern existent) die Werte von a an, sodass $\vec{v}, \vec{w}$ orthogonal sind. Sind die Vektoren für $a = 2$ parallel?

Beispiel 8.3. Rechnen Sie nach, dass die Vektoren

(3 Pkt.)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zueinander orthogonal sind. Ermitteln Sie einen Vektor $\vec{w}$, der zusammen mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bildet und normieren Sie anschließend alle drei Vektoren, um eine Orthonormalbasis B zu erhalten. Berechnen Sie dann die Koordinaten des Vektors

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bezüglich B .

Beispiel 8.4. Weisen Sie nach, dass

(2 Pkt.)

$$\vec{w}^{(1)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}^{(3)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des von ihnen aufgespannten Unterraumes W von $\mathbb{R}^4$ bilden und bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf W .

Beispiel 8.5. Gegeben ist die folgende Basis von $\mathbb{R}^3$:

(3 Pkt.)

$$\vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie das Gram-Schmidtsche Verfahren, um aus den Vektoren $\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}, \vec{u}^{(3)}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ zu bilden. Führen Sie die Rechnung dreimal durch: Einmal in der Reihenfolge $\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}, \vec{u}^{(3)}$, einmal in der Reihenfolge $\vec{u}^{(3)}, \vec{u}^{(2)}, \vec{u}^{(1)}$ und einmal in der Reihenfolge $\vec{u}^{(2)}, \vec{u}^{(3)}, \vec{u}^{(1)}$.