Mathematik A (EEE) WS 2024/25

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

11. Übungsblatt (08.01.2025)

Beispiel 11.1. Gegeben ist die folgende Basis von $\mathbb{R}^3$: **(3 Pkt.)**

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie das Gram-Schmidtsche Verfahren, um aus den Vektoren u_1, u_2, u_3 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ zu bilden. Führen Sie die Rechnung zweimal durch: Einmal in der Reihenfolge u_1, u_2, u_3 und einmal in der Reihenfolge u_3, u_2, u_1 .

Beispiel 11.2. Ermitteln Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrizen, deren Eigenräume sowie algebraische und geometrische Vielfachheiten. **(4 Pkt.)**

(a) $B = \begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\-7 & 5 & -1\\-6 & 6 & -2\end{pmatrix}$ (über $\mathbb{R}$);

(b) $C = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{pmatrix}$ (über $\mathbb{C}$).

Beispiel 11.3. Eine Matrix A heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Matrix B und eine Diagonalmatrix D gibt, sodass $B^{-1}AB = D$ gilt. Bestimmen Sie B und D für **(3 Pkt.)**

$$A = \begin{pmatrix}3 & -2\\4 & -3\end{pmatrix}$$

und verwenden Sie diese Darstellung um A^{2025} zu berechnen. (Hinweis: Sie können für die Spalten von B die Eigenvektoren von A und für die Einträge von D die zugehörigen Eigenwerte verwenden. Bilden die Eigenvektoren von A hier eine Basis von $\mathbb{R}^2$?)

Beispiel 11.4. Bestimmen Sie die Hauptachsentransformation der folgenden Matrix: **(3 Pkt.)**

$$M = \begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\-2 & 3 & 2\\2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Mit anderen Worten, finden Sie eine Orthogonalmatrix P und eine Diagonalmatrix D, sodass $D = P^{-1}MP = P^tMP$.

Beispiel 11.5. Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen **(2 Pkt.)**

$$f_1(x) = \ln\left(\frac{\cos(x) + \sin(x)}{e^{2x} - 1}\right) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \frac{(-x)^3 + 3^x}{\tan(x)\sin(x)}\,.$$