Mathematatik A (EEE) WS 2024/25

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

2. Übungsblatt (23.10.2024)

Beispiel 2.1. Berechnen Sie

(a) $|8+6i|$ **(1 Pkt.)**

(b) $\frac{1}{8+6i}$ **(1 Pkt.)**

(c) $\frac{1+i}{1-i}$ in Polarkoordinaten **(1 Pkt.)**

Beispiel 2.2. Ermitteln Sie jeweils **alle** $z \in \mathbb{C}$, welche die folgenden Gleichungen erfüllen:

(a) $z^4 = 1 - i$ **(2 Pkt.)**

(b) $z^2 + (1+i)z + i = 0$ **(2 Pkt.)**

Beispiel 2.3. Für welche komplexen Zahlen gilt $\bar{z} = \frac{1}{z}$? Skizzieren Sie die Menge in der komplexen Zahlenebene. **(2 Pkt.)**

Beispiel 2.4.

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \geq 0$ gilt **(2 Pkt.)**

$$\sum_{j=0}^{n} j2^{j-1} = 2^n(n-1) + 1.$$

(b) Untersuchen Sie mittels vollständiger Induktion, für welche $n \geq 0$ die folgende Ungleichung gilt: **(2 Pkt.)**

$$2^n \leq n!$$

Beispiel 2.5. Finden Sie den Fehler im folgenden „Beweis". Welche Argumente funktionieren, welche nicht? **(2 Pkt.)**

Behauptung: Alle Studierenden dieses Kurses erhalten die gleiche Note.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $A(n)$ die Aussage, dass in jeder Menge von n Studierenden dieses Kurses alle die gleiche Note erhalten. Wir beweisen $A(n)$ mit vollständiger Induktion; die Behauptung folgt dann, wenn wir n als die Anzahl aller Studierenden dieses Kurses wählen.

- Induktionsanfang $n = 1$: Jede/r Studierende/r hat offensichtlich die gleiche Note wie sie/er selbst, also ist $A(1)$ wahr.
- Induktionsannahme: Wir nehmen an, $A(n)$ ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschritt: Wir beweisen, dass dann auch $A(n+1)$ wahr ist. Hierfür betrachten wir eine Menge M von $n+1$ Studierenden, die wir als $S_1, \ldots, S_{n+1}$ durchnummerieren. Die Menge $M_1 = \{S_1, \ldots, S_n\}$ besteht aus n Studierenden, ebenso die Menge $M_2 = \{S_2, \ldots, S_{n+1}\}$. Aufgrund der Induktionsannahme erhalten alle Studierenden in M_1 die gleiche Note. Gleiches gilt für alle Studierende in M_2. Also erhalten alle Studierende in M die gleiche Note.