# Mathematatik A (EEE) WS 2024/25

## Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

## 3. Übungsblatt (30.10.2024)

**Beispiel 3.1.** Überprüfen Sie für jede der nachstehenden Folgen, ob sie beschränkt, monoton wachsend oder monoton fallend, konvergent oder divergent ist. Für jede Folge bestimmen Sie alle ihre Häufungswerte. **(3 Pkt.)**

(a) $(a_n)_{n\geq 0}$, wobei $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n^2+1}$.

(b) $(b_n)_{n\geq 2}$, wobei $b_n = \dfrac{n^2+3}{n-1} - \dfrac{n^2-1}{n}$.

**Beispiel 3.2.** **(3 Pkt.)**

(a) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch

$$a_n = \frac{1}{n} + 2(-1)^n, \qquad n \geq 1$$

und geben Sie den Limes inferior und Limes superior an.

(b) Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Folge an mit

  (a) keinem Häufungswert,
  (b) genau einem Häufungswert,
  (c) genau 3 Häufungswerten und
  (d) unendlich vielen Häufungswerten.

(Hinweis: Sie müssen nicht die Folgen in der üblichen Form $a_n = \ldots$ angeben.)

**Beispiel 3.3.** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert als: **(3 Pkt.)**

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \text{ für } n \geq 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $a_n < 2$, für alle $n \geq 0$. (Hinweis: Induktion.)

(b) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, und folgern Sie daraus, dass die Folge konvergiert.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $a$ der Folge. (Hinweis: Berechnen Sie den Grenzwert der beiden Seiten der Formel $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$.)

**Beispiel 3.4.** Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $a_n = a_{n-1} + n$ mit Anfangswert $a_0 = 4$. Finden Sie eine explizite Darstellung für $a_n$. **(2 Pkt.)**

**Beispiel 3.5.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie die wahren Aussagen und finden Sie ein Gegenbeispiel für jede falsche Aussage. Hierbei dürfen Sie bekannte Ergebnisse aus der Vorlesung benutzen. (Die Folgen seien stets in den reellen Zahlen gegeben.) **(3 Pkt.)**

(a) Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

(b) Jede unbeschränkte Folge ist nicht konvergent.

(c) Jede nicht monotone Folge ist nicht konvergent.